

Menge aller robust stabilisierenden PID-Regler: Methodik und Software (Teil II)

The Set of All Robust Stabilizing PID Controllers: Methods and Software (Part II)

Naim Bajcinca und Thomas Hulin

Dieser Aufsatz befasst sich mit der Berechnung der Menge aller stabilisierenden PID-Regler im zeitdiskreten Bereich. Dem Verfahren liegt die im ersten Teil vorgestellte Entkopplung von Reglerparametern zugrunde, die für zeitdiskrete Systeme in einem rotierten Parameterraum stattfindet. Die resultierenden stabilen Gebiete setzen sich aus konvexen polygonalen Schnitten zusammen. Die Entwurfsmethodik kann in zwei Unterprobleme aufgeteilt werden, erstens die Bestimmung von Intervallen, für die stabile Polygone existieren, und zweitens die Berechnung dieser Polygone. Diese Veröffentlichung stellt Lösungsansätze für beide Probleme vor.

The problem of finding the set of all PID and three-term stabilizers for discrete-time systems is solved in this paper. The method uses the fact that in a rotated parameter space, controller parameters decouple at singular frequencies. The resulting stable regions are composed by convex polygonal slices. The design problem may be divided into two subtasks: (a) assertion of intervals where stable polygons may exist, and (b) their detection. This paper provides solutions to both problems.

Schlagwörter: Diskreter PID-Regler, singuläre Frequenz, robuste Regelung

Keywords: Discrete PID, singular frequencies, robust control

1 Einleitung

Der bereits erschienene erste Teil [3] dieser Veröffentlichungsreihe aus drei Teilen stellt ein Verfahren vor, mit dem die Menge aller robust stabilisierenden PID-Reglerparameter für zeitkontinuierliche Systeme berechnet werden kann. Dieser zweite Teil beschreibt den Reglerentwurf mit dem vorgestellten Verfahren im zeitdiskreten Bereich. Erste Ergebnisse diesbezüglich präsentieren [4] und [1] und zeigen, dass auch Schur-stabile Gebiete aus polygonalen Schnitten zusammengesetzt werden können, allerdings in einem rotierten Parameterraum.

Der vorliegende Artikel beweist, dass die Möglichkeit zur Entkopplung, die für Hurwitz-Stabilität und zeitkontinuierliche PID-Regler beobachtet wurde, im Allgemeinen bei jeder singulären Frequenz gegeben ist. Damit wird die im ersten Teil vorgestellte Lösung des k_P -Problems unter Verwendung einer neu eingeführten Entkopplungsfunktion für diskrete Systeme hergeleitet. In Analogie zum zeitkontinu-

ierlichen Fall wird gezeigt, dass für eine vorgegebene Regelstrecke eine bestimmte Anzahl an singulären Frequenzen vorhanden sein muss, um Stabilität zu erreichen. Zudem wird der bereits vorgestellte Algorithmus zur automatischen Bestimmung stabiler Polygone unter Verwendung so genannter Überquerungsfunktionen verallgemeinert.

2 Problemdefinition

Gegeben sei die geschlossene Kurve in der z -Ebene $\Gamma = \{z \mid z = \tau(\alpha) + j\eta(\alpha), \alpha \in [a, b]\}$, die symmetrisch zur reellen Achse τ verläuft und sich implizit angeben lässt durch

$$\Gamma: \gamma(\tau, \eta) = 0. \quad (1)$$

Von besonderem Interesse sind dabei Γ in Form von Kreisen mit Mittelpunkt auf der reellen Achse und beliebigem Radius, die so genannten Γ -Kreise, da sich mit ihnen Dämpfung und Einschwingzeit der geregelten Systeme einstellen lässt [1].

Weiter betrachte man die charakteristische Gleichung

$$p = A(z)Q(z, r_0, r_1, r_2) + B(z) = 0 \tag{2}$$

mit den Polynomen A und B in z . Die darin angegebene Funktion Q sei von der Form

$$Q = \delta_0(z)r_0 + \delta_1(z)r_1 + \delta_2(z)r_2 \tag{3}$$

mit den reellen Parametern r_0, r_1 und r_2 und den Polynomen $\delta_i(z)$ in z mit einer Ordnung ≤ 2 . Gesucht werde nun die Menge aller Parameter $r = [r_0, r_1, r_2]^T$, für die das charakteristische Polynom p Γ -stabil ist, für die sich also alle Eigenwerte innerhalb von Γ befinden.

Mit den obigen Vorgaben umfasst Gleichung (2) alle charakteristischen Gleichungen von geschlossenen Regelkreisen mit PID-Reglern. So auch den allgemeinen zeitdiskreten PID-Regler der Übertragungsfunktion

$$C_1(z) = \frac{c_0 + c_1z + c_2z^2}{(z + z_1)(z - 1)}. \tag{4}$$

Für den Parameter z_1 folgt durch Anwenden der Rechtecknäherung auf den idealen PID-Regler $k_I/s + k_P + k_{DS}$ der Wert $z_1 = 0$ und mit der Trapeznäherung (Tustinformel) $z_1 = 1$. Für den realisierbaren PID-Regler $k_I/s + k_P + k_{DS}/(1 + T_1s)$ folgt mit der Trapeznäherung ebenfalls die Übertragungsfunktion (4), diesmal mit einem Pol bei $z_1 = -(2T_1 - T)/(2T_1 + T)$.

Weiterhin stellt die folgende Übertragungsfunktion eine Verallgemeinerung des PID-Reglers auf Regler mit beliebigem Nennerpolynom zweiter Ordnung dar, die in diesem Artikel als PID-ähnliche Regler bezeichnet werden (engl.: Three-term controller):

$$C_2(z) = \frac{n(z)(c_0 + c_1z + c_2z^2)}{d(z)} \tag{5}$$

wobei $n(z)$ und $d(z)$ wieder Polynome in z sind. Bei beiden Reglerstrukturen, (4) und (5), ergibt sich die gleiche Struktur für das Polynom Q

$$Q = c_0 + c_1z + c_2z^2. \tag{6}$$

Es ist offensichtlich, dass (3) und (6) über eine lineare Parametertransformation miteinander zusammenhängen

$$c = T r, \quad \det T \neq 0 \tag{7}$$

mit $c = [c_0, c_1, c_2]^T$ und $r = [r_0, r_1, r_2]^T$, die durch die Polynome $\delta_0(z), \delta_1(z)$ und $\delta_2(z)$ bestimmt ist. Da die charakteristische Gleichung (2) mit dieser Transformation die gleiche Struktur besitzt wie die zeitkontinuierliche charakteristische Gleichung aus dem ersten Teil, lassen sich die dort gemachten Überlegungen entsprechend auch für den zeitdiskreten Fall anwenden. Die Herleitungen hierzu bauen auf den folgenden Definitionen und Sätzen auf.

3 Grundlegende Definitionen und Sätze

Die reellen Polynome H und G seien Real- und Imaginärteil des charakteristischen Polynoms $p(z, r_0, r_1, r_2)$ auf Γ .

Definition 1 Die Kurve Γ heißt *singulär bezüglich der Parameter r_0 und r_2 in (2)*, wenn die Rangbedingung

$$\text{Rg} \frac{\partial(H, G)}{\partial(r_0, r_2)} = 1 \quad \forall z \in \Gamma. \tag{8}$$

erfüllt ist.

Definition 2 Die Funktion $E_\Gamma(z)$, die durch

$$Q(z, r_0, r_1, r_2) = E_\Gamma(z) q(z, r_0, r_1, r_2) \tag{9}$$

so definiert ist, dass der Imaginärteil I_q von q

$$I_q = r_1 g_1(\alpha) + g_0(\alpha), \quad \alpha \in [a, b] \tag{10}$$

nicht von den Parametern r_0 und r_2 abhängt, d. h. $\frac{\partial I_q}{\partial r_0} = \frac{\partial I_q}{\partial r_2} = 0$, wird als *Entkopplungsfunktion von Q auf Γ bezeichnet*.

Lemma 1 Für singuläres Γ gilt

$$\frac{\partial I_q}{\partial r_0} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial I_q}{\partial r_2} = 0, \quad \forall z \in \Gamma. \tag{11}$$

Beweis. Die Determinante der linken Seite der Rangbedingung (8) ergibt sich zu

$$\det \left(\frac{\partial(H, G)}{\partial(r_0, r_2)} \right) = (R_A^2 + I_A^2) (R_E^2 + I_E^2) \left(\frac{\partial R_q}{\partial r_0} \frac{\partial I_q}{\partial r_2} - \frac{\partial I_q}{\partial r_0} \frac{\partial R_q}{\partial r_2} \right)$$

mit den Realteilen R_A und R_E sowie den Imaginärteilen I_A und I_E der jeweiligen Funktionen A und E_Γ . Gilt die Rangbedingung, so ist die rechte Seite der obigen Gleichung gleich null und es gilt $\frac{\partial I_q}{\partial r_0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial I_q}{\partial r_2} = 0$, da $\frac{\partial R_q}{\partial r_0} \neq 0$. Ebenso gilt $\frac{\partial I_q}{\partial r_2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial I_q}{\partial r_0} = 0$, da $\frac{\partial R_q}{\partial r_2} \neq 0$. \square

Für ein gegebenes Polynom Q ist die Entkopplungsfunktion $E_\Gamma(z)$ von Q nicht eindeutig definiert. Jedoch lässt sie sich mit Lemma 1 direkt aus (3) bestimmen:

Satz 1 Zwei Entkopplungsfunktionen von Q aus (3) über Γ sind

$$E_\Gamma(z) = \delta_0(z), \quad E_\Gamma(z) = \delta_2(z). \tag{12}$$

Beweis. Mit der Annahme $E_\Gamma(z) = \delta_0(z)$ gilt

$$q = r_0 + \frac{\delta_1(z)}{\delta_0(z)} r_1 + \frac{\delta_2(z)}{\delta_0(z)} r_2$$

und $\frac{\partial I_q}{\partial r_0} \equiv 0$. Lemma 1 garantiert, dass für alle $z \in \Gamma$ der Imaginärteil von $\frac{\delta_2(z)}{\delta_0(z)}$ ebenfalls verschwindet und Gleichung (10) gilt. Falls $\frac{\delta_2(z)}{\delta_0(z)}$ reell auf Γ ist, so ist die Inverse dazu ebenfalls reell auf Γ . Also ist (10) auch für $E_\Gamma(z) = \delta_2(z)$ erfüllt. \square

Schließlich kann folgende Feststellung einfach überprüft werden.

Satz 2 Man betrachte die Funktion

$$F(z) := \frac{p(z)}{A(z)E_\Gamma(z)}. \quad (13)$$

Die Gleichung $F(z) = 0$ entkoppelt für $z \in \Gamma$ die Parameter r_0, r_1 und r_2 in zwei Gleichungen:

$$r_0 h_1(\alpha) + r_2 h_2(\alpha) + h_0(\alpha) = 0, \quad (14)$$

$$r_1 g_1(\alpha) + g_0(\alpha) = 0. \quad (15)$$

3.1 Schur-Stabilität

Betrachtet man den Fall der Schur-Stabilität, so entspricht die Kurve Γ dem Einheitskreis $\Gamma = \{e^{j\alpha} : \alpha \in [-\pi, \pi]\}$. Ein mögliches Q , für das die Rangbedingung (8) erfüllt ist, ergibt sich beispielsweise zu

$$Q = (1 + z^2)r_0 + r_1 + zr_2 \quad (16)$$

mit der entsprechenden Transformationsmatrix (7)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Mit Satz 1 folgen daraus die beiden Entkopplungsfunktionen über den Schur-Kreis

$$E_\Gamma(z) = 1 + z^2 \quad \text{und} \quad E_\Gamma(z) = z. \quad (18)$$

Für $E_\Gamma(z) = z$ nimmt der Imaginärteil der Funktion

$$F(z) = \frac{1 + z^2}{z}r_0 + \frac{1}{z}r_1 + r_2 + \frac{B(z)}{zA(z)} \quad (19)$$

auf dem Schur-Kreis die Form von (10) an, wobei der Imaginärteil von $\frac{1+z^2}{z}$ auf dem Schur-Kreis verschwindet.

3.2 Γ -Stabilität

Man betrachte einen Γ -Kreis mit Mittelpunkt auf der imaginären Achse $\Gamma = \{m + re^{j\alpha}, \alpha \in [-\pi, \pi]\}$ (siehe Bild 1). Nun kann gezeigt werden, dass

$$Q = (r^2 - m^2 + z^2)r_0 + r_1 + (z - m)r_2 \quad (20)$$

eine Lösung bezüglich der Rangbedingung (8) darstellt. Für Γ -Kreise mit reellem Mittelpunkt $m = \tau$ und Radius r folgt damit für die Transformation (7)

$$T = \begin{bmatrix} r^2 - m^2 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

In Übereinstimmung mit Satz 1 ist

$$E_\Gamma(z) = z - m \quad (22)$$

eine Entkopplungsfunktion und damit

$$F(z) = \frac{r^2 - m^2 + z^2}{z - m}r_0 + \frac{1}{z - m}r_1 + r_2 + \frac{B(z)}{(z - m)A(z)}. \quad (23)$$

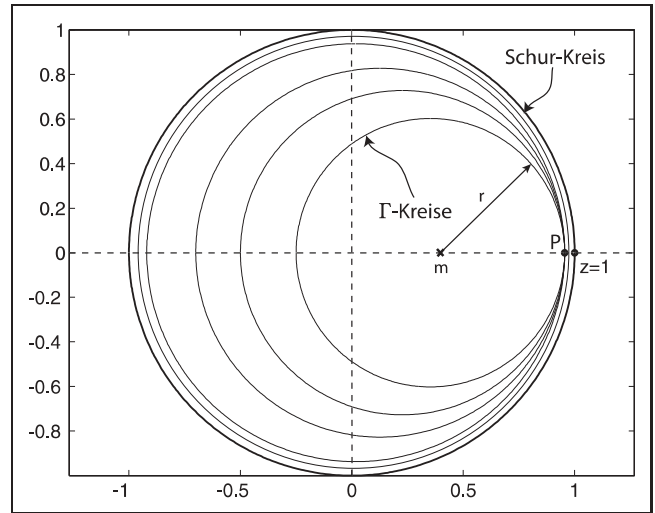


Bild 1: Schur- und Γ -Kreise.

Beispiel 1: Gegeben sei die zeitdiskrete Regelstrecke

$$G = 10^{-6} \frac{4,165z^3 + 45,77z^2 + 45,77z + 4,165}{z^4 - 3,985z^3 + 5,97z^2 - 3,985z + 1} \quad (24)$$

und der Regler

$$C(z) = 10^4 \frac{(z^2 - 1,541z + 0,599)(c_0 + c_1z + c_2z^2)}{z(z + 0,4047)(z + 0,2162)(z - 0,4934)}, \quad (25)$$

dessen Parameter $c = [c_0, c_1, c_2]^T$ untersucht werden sollen. Die Reglersynthese findet jedoch im r -Parameterraum statt. Zusammen mit der Transformation (17) folgt

$$\begin{aligned} A &= z^5 + 9,44z^4 - 5,34z^3 - 9,34z^2 + 5,04z + 0,59 \\ B &= 0,19z^8 - 0,73z^7 + z^6 - 0,45z^5 - 0,12z^4 + \dots \\ &\quad 0,14z^3 - 0,009z^2 - 0,008z. \end{aligned} \quad (26)$$

Zur Berechnung der singulären Frequenzen wird Gleichung (15) herangezogen

$$r_2 = \frac{C_\alpha^5 - 2,71 C_\alpha^4 + 1,61 C_\alpha^3 + 1,35 C_\alpha^2 - 1,70 C_\alpha + 0,44}{0,02 C_\alpha^4 + 0,08 C_\alpha^3 - 0,13 C_\alpha^2 - 0,08 C_\alpha + 0,11} \quad (27)$$

mit $C_\alpha = \cos(\alpha)$. Zur Veranschaulichung zeigt Bild 2 den Graphen von r_1 (Generator der singulären Frequenzen). Für ein willkürlich gewähltes $r_1 = -0,26118$ berechnen sich die singulären Frequenzen auf dem Schur-Kreis zu

$$\begin{aligned} \alpha'_1 = 0 &\Rightarrow z'_1 = 1 \\ \alpha'_2 = \pm 0,4097 &\Rightarrow z'_2 = 0,9172 \pm j0,3983 \\ \alpha'_3 = \pm 0,97300 &\Rightarrow z'_3 = 0,5628 \pm j0,8266 \\ \alpha'_4 = \pm \pi &\Rightarrow z'_4 = -1. \end{aligned} \quad (28)$$

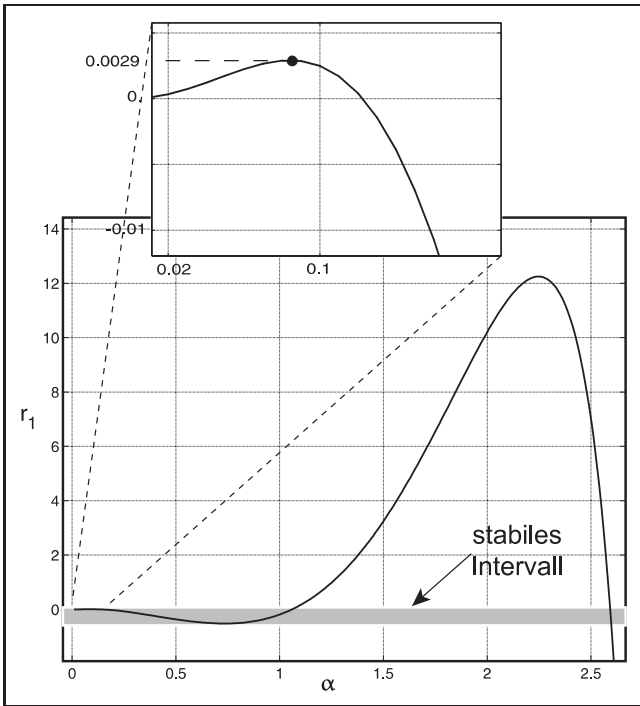


Bild 2: Der Graph des Generators der singulären Frequenzen, Gleichung (27).

4 Stabile Polygone

Für zeitkontinuierliche Systeme wurde der Begriff der inneren Polygone bereits vorgestellt [3]. Mit ihrer Hilfe konnten die stabilen Polygone bestimmt werden. Dabei wurde jeder singulären Geraden λ_i eine Überquerungsfunktion e zugewiesen, die aufzeigte, auf welcher Seite einer singulären Geraden mehr stabile Eigenwerte existieren. Dieser Abschnitt vervollständigt die genannte Algorithmik durch eine Verallgemeinerung der Überquerungsfunktionen e . Dabei wird der Parameter r_1 als konstant angenommen.

4.1 Überquerungsfunktion

Zunächst betrachte man die in Bild 3 gezeigte Γ -Kurve definiert in (1). Dabei sei z' eine singuläre Frequenz auf Γ . Für den Normalenvektor N von Γ im Punkt $z' = \tau' + j\eta'$ folgt

$$N := \text{grad } \gamma \Big|_{z'} = \begin{bmatrix} \partial\gamma/\partial\tau \\ \partial\gamma/\partial\eta \end{bmatrix}_{z'} \quad (29)$$

Man beachte, dass N bezüglich Γ nach außen zeigt. Bei einer Überquerung über die singuläre Gerade $\lambda(z')$ betritt oder verlässt ein Eigenwert das Γ -Gebiet im Punkt der entsprechenden singulären Frequenz z' . Um diese Bewegung des Eigenwertes zu beschreiben, wird ein Vektor μ definiert als

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} d\tau/dr_0 \\ d\eta/dr_0 \end{bmatrix} \text{ bzw. } \mu_2 = \begin{bmatrix} d\tau/dr_2 \\ d\eta/dr_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

wobei μ_0 der Überquerung $\partial r_0 > 0$ entspricht und μ_2 entsprechend $\partial r_2 > 0$. Im Folgenden werden alle Berechnungen dieses Abschnitts für die Überquerungsfunktion $\partial r_0 > 0$

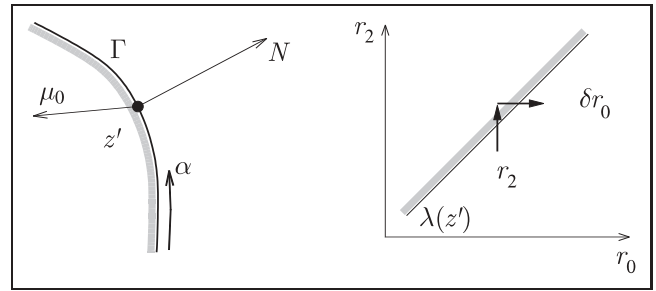


Bild 3: Für die Definition von e_0 : die Bewegung eines Eigenwertes in der Umgebung einer singulären Frequenz z' .

durchgeführt. Die Formeln für $\partial r_2 > 0$ erhält man durch Austauschen der Indices $0 \rightarrow 2$.

Für die Herleitung des Vektors μ_0 betrachte man die Gleichungen $H(r_0, r_2, \tau, \eta) = 0$ und $G(r_0, r_2, \tau, \eta) = 0$, wobei H und G der Real- bzw. Imaginärteil von (2) auf Γ ist. Leitet man diese Gleichungen nach r_0 ab und löst das daraus resultierende Gleichungssystem nach den Komponenten von μ_0 , ergibt sich

$$\mu_0 = \frac{1}{J_c} \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial(H, G)}{\partial(\eta, r_0)} \right|_{z'} & \left. \frac{\partial(H, G)}{\partial(r_0, \tau)} \right|_{z'} \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

wobei $J_c = \left| \frac{\partial(H, G)}{\partial(\tau, \eta)} \right| > 0$.

Die Richtung der Überquerung von Eigenwerten bei z' wird durch das folgende Skalarprodukt beschrieben

$$e_0 = J_c \mu_0^T \cdot N. \quad (32)$$

Satz 3 Sei z' eine singuläre Frequenz. Die Überquerung über die singuläre Gerade $\lambda(z')$ lässt einen Eigenwert das Γ -Gebiet bei z' betreten oder verlassen, abhängig von dem Vorzeichen des Ausdrucks

$$e_{0/2} := \left(\frac{\partial\gamma}{\partial\tau} \frac{\partial(H, G)}{\partial(\eta, r_{0/2})} \Big|_{z'} + \frac{\partial\gamma}{\partial\eta} \frac{\partial(H, G)}{\partial(r_{0/2}, \tau)} \Big|_{z'} \right). \quad (33)$$

Falls dieser Ausdruck positiv ist, verlässt der Eigenwert das Γ -Gebiet bei z' , ist der Ausdruck negativ so betritt er es an dieser Stelle.

Für das Hurwitz Γ -Gebiet (rechte Halbebene) vereinfacht sich die Berechnung der Überquerungsfunktion zu

$$e_0 = \left. \frac{\partial(H, G)}{\partial(\omega, r_0)} \right|_{\omega'}. \quad (34)$$

Beispiel 1 (Fortsetzung): Man betrachte die (r_0, r_2) -Ebene für $r_1 = -0,26118$. Die resultierenden singulären Frequenzen wurden im vorherigen Abschnitt in Gleichung (28) berechnet. Jede dieser singulären Frequenzen z'_v erzeugt in der betrachteten Ebene eine singuläre Gerade λ_v . Bild 4 zeigt das resultierende stabile Polygon. Es wird von den singulären Geraden λ_1, λ_2 und λ_3 begrenzt, die den singulären Frequenzen z'_1, z'_2 und z'_3 entsprechen. \square

Eine einfachere Handhabung der Überquerungsfunktionen ergibt sich in der komplexen Darstellung

$$\underline{\mu}_0 = \frac{d\tau}{dr_0} + j \frac{d\eta}{dr_0} = \frac{dz}{dr_0} \text{ und } \underline{\mu}_2 = \frac{dz}{dr_2}. \quad (35)$$

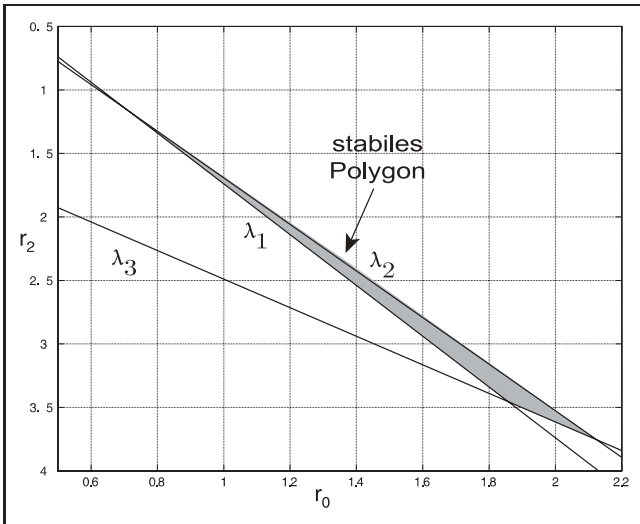


Bild 4: Das stabile Polygon in der Ebene $r_1 = -0,26118$.

Mit dem totalen Differential $dp(z, r_0) = \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial r_0} dr_0 = 0$ folgt

$$\underline{\mu}_0 = - \frac{\frac{\partial p}{\partial r_0}}{\frac{\partial p}{\partial z}} \quad (36)$$

Die Überquerungsfunktion vereinfacht sich damit zu

$$\tilde{e}_0 = \text{Re} \left(\underline{\mu}_0^* N \right) \quad (37)$$

wobei $\text{Re}(\cdot)$ für den Realteil und $*$ für die komplex Konjugierte steht. Vergleicht man mit (32), gilt $e_0 = J_c \tilde{e}_0$, mit $J_c = \left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|$.

4.2 Typen singularer Frequenzen

Für den Fall der Hurwitz-Stabilität veranschaulicht Bild 5 drei mögliche Szenarien für die Bewegung eines Eigenwertes in der Nähe einer singulären Frequenz. Die bisherige Diskussion bezieht sich nur auf den am häufigsten auftretenden Typ einer singulären Frequenz, die einfache Überquerung (Bild 5a links). Hierfür ist die Bewegungsrichtung eines Eigenwertes bei einer singulären Frequenz durch die Überquerungsfunktion (37) vollständig bestimmt.

Für die beiden anderen Szenarien, Beugung (5b) und Reflexion (5c) können diese Ausdrücke nicht verwendet werden, da dann die Übertragungsfunktion zu null verschwindet. Um dennoch eine Aussage über diese zwei eher seltenen Fälle treffen zu können, betrachte man die Ableitung von $\tilde{e}'_0 = \frac{d\tilde{e}_0}{dr_0}$. Da der Normalenvektor N nicht von r_0 abhängt, gilt

$$\tilde{e}'_0 = \text{Re} \left(\underline{\mu}'_0{}^* N \right) \quad (38)$$

Der kritische Ausdruck ist also $\underline{\mu}'_0 = \frac{d\underline{\mu}_0}{dr_0}$. Für $\tilde{e}'_0 \neq 0$ tritt eine Reflexion auf. Es ist offensichtlich, dass dieser Typ von singulären Frequenzen nicht zur Begrenzung des Stabilitätsgebietes beiträgt. Um die Bewegungsrichtung für $\tilde{e}'_0 = 0$ zu untersuchen, muss die zweite Ableitung der Überquerungsfunktion betrachtet werden

$$\tilde{e}''_0 = \text{Re} \left(\underline{\mu}''_0{}^* N \right) \quad (39)$$

wobei $\underline{\mu}''_0 = \frac{d^2 \underline{\mu}_0}{dr_0^2}$. Für $\tilde{e}''_0 \neq 0$ tritt eine Beugung auf. Es gilt dann die Regel aus Satz 3, ist $\tilde{e}''_0 < 0$ wird ein Eigenwert stabil und umgekehrt. Die für die Berechnung der Ausdrücke (38) und (39) benötigten Formel

$$\underline{\mu}'_0 = - \frac{\underline{\mu}_0^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2\underline{\mu}_0 \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial r_0}}{\frac{\partial p}{\partial z}} \quad (40)$$

und

$$\underline{\mu}''_0 = - \frac{\underline{\mu}_0^3 \frac{\partial^3 p}{\partial z^3} + 3\underline{\mu}_0^2 \frac{\partial^3 p}{\partial z^2 \partial r_0} + 3\underline{\mu}_0 \underline{\mu}'_0 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 3\underline{\mu}'_0 \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial r_0}}{\frac{\partial p}{\partial z}} \quad (41)$$

können einfach überprüft werden.

Zur Verallgemeinerung nehme man an, dass $e_0 = e'_0 = e''_0 = \dots = e_0^{(k)} = 0$ und $e_0^{(k+1)} \neq 0$. Für gerade k tritt der Fall einer Reflexion auf und für ungerade eine Beugung. Für den Fall der Beugung betritt genau dann ein Eigenwert das Stabilitätsgebiet wenn $\tilde{e}_0^{(k+1)} < 0$.

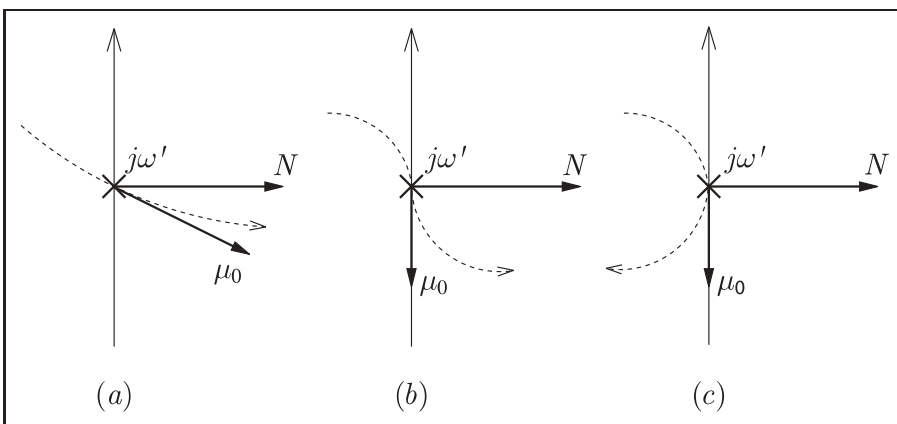


Bild 5: Typen singularer Frequenzen: (a) einfache Überquerung, (b) Wendepunkt und (c) Reflexion.

5 Stabile Rasterintervalle

In diesem Abschnitt wird das im ersten Teil dieses Aufsatzes [3] vorgestellte k_P -Problem für den zeitdiskreten Bereich angepasst. Es handelt sich dabei also um die Bestimmung der stabilen r_1 -Intervalle unabhängig von den Parametern r_0 und r_2 . Die Anpassung der Lösung des k_P -Problems in den zeitdiskreten Bereich basiert auf folgendem Lemma 2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird das Γ -Gebiet als Schur-Kreis angenommen.

Lemma 2 *Man betrachte die Mikhailov-Ortskurve einer Funktion $F(e^{j\alpha})$ auf dem Einheitskreis Γ_1 . Es gebe J Pole unterschiedlich von ± 1 auf Γ_1 , ein J_+ -facher Pol bei $z = +1$, und ein J_- -facher Pol bei $z = -1$. Falls die Phasenveränderung des Mikhailov-Vektors $F(e^{j\alpha})$ auf dem Intervall $-\pi \leq \alpha \leq +\pi$ den Wert $N\pi$ annimmt, schneidet er die reelle Achse mindestens Z mal für $0 < \alpha < +\pi$, wobei*

$$Z = \frac{N - J - 2 - E(J_+) - E(J_-)}{2} \tag{42}$$

Dabei ist E die im ersten Teil eingeführte Abrundefunktion. Auf den Beweis (siehe [6]) wird an dieser Stelle aus Platzgründen verzichtet, hier seien nur einige Hinweise gegeben: (a) J ist immer gerade, (b) die Mikhailov-Ortskurve ist symmetrisch zur reellen Achse τ und (c) die Pole auf Γ werden durch infinitesimal kleine Kreise umgangen, wobei die Mikhailov-Ortskurve eine Phasenveränderung von $\pm\pi$ bei unendlich erfährt.

Satz 4 *Für das charakteristische Polynom (2) und ein singuläres Γ sei*

- N : die Ordnung des Polynoms (2)
- R : die Anzahl der Nullstellen von $A(z)E_\Gamma(z)$ innerhalb Γ
- J : die Anzahl der Nullstellen $\neq \pm 1$ von $A(z)E_\Gamma(z)$ auf Γ
- J_+ : die Vielfachheit der Nullstelle $z = +1$ von $A(z)E_\Gamma(z)$
- J_- : die Vielfachheit der Nullstelle $z = -1$ von $A(z)E_\Gamma(z)$
- Z : die Anzahl der singulären Frequenzen im Intervall $0 < \alpha < +\pi$.

Eine notwendige Bedingung für Stabilität von (2) ist

$$Z \geq N - R - \frac{J + E(J_+) + E(J_-) + 2}{2} \tag{43}$$

Beweis. Die Gleichung

$$F(z) = \frac{p(z)}{A(z)E_\Gamma(z)} = 0 \tag{44}$$

entkoppelt die Parameter r_0 , r_1 und r_2 in die beiden Gleichungen (14) und (15), wobei der Imaginärteil den Generator der singulären Frequenzen repräsentiert. Die Mikhailov-Ortskurve der Funktion $F(z)$ mit $z = \tau(\alpha) + j\eta(\alpha)$ und $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ schneidet die reelle Achse genau bei den singulären Frequenzen $z' = z(\alpha')$. Ist $p(z)$ Γ -stabil, so ergibt sich für die Winkeländerung $\Delta\phi$ der Funktion $F(z)$ auf Γ

beim Durchlaufen der Frequenz α von einschließlich $-\pi$ bis einschließlich $+\pi$

$$\Delta\phi = (N - R)2\pi \tag{45}$$

Die $J + J_+ + J_-$ Nullstellen von $A(z)E_\Gamma(z)$, die auf Γ liegen, werden durch unendlich kleine Halbkreise umlaufen, d.h. sie werden als Nullstellen außerhalb von Γ betrachtet. Schließlich resultiert (43) aus Lemma 2, wenn man N durch $2(N - R)$ ersetzt. \square

Beispiel 1 (Fortsetzung): Man betrachte den Fall der Schur-Stabilität für die Polynome A und B aus (26). Das Polynom $A(z)$ besitzt drei Nullstellen innerhalb des Schur-Kreises, eine bei $z = -1$ und zwei außerhalb. Damit folgt unter Verwendung der Entkopplungsfunktion $E_\Gamma(z) = z$ (siehe (18))

$$N = 8, \quad R = 3 + 1 = 4, \quad J = 1, \quad J_+ = 0 \text{ und } J_- = 1.$$

Für Stabilität werden also $Z \geq 3$ singuläre Frequenzen im Intervall $0 < \alpha < +\pi$ benötigt. Die stabilen r_1 -Intervalle können aus Bild 2 abgelesen werden. Nach Satz 4 können ausschließlich innerhalb des schattierten Bereichs in Bild 2 stabile Polygone existieren

$$-0,52236 < r_1 < 0,00290.$$

Im vergrößerten Ausschnitt in dieser Abbildung tauchen für $0 < r_1 < 0,00290$ vier zusätzliche singuläre Frequenzen auf. Man beachte, dass $\alpha = 0$ eine singuläre Frequenz ist, $\alpha = \pm\pi$ jedoch nicht.

Wird andererseits die Entkopplungsfunktion $E_\Gamma(z) = 1 + z^2$ verwendet, folgt

$$N = 8, \quad R = 3, \quad J = 3, \quad J_+ = 0 \text{ und } J_- = 1.$$

Klar werden auch hier nach (43) wieder $Z \geq 3$ singuläre Frequenzen im Intervall $0 < \alpha < +\pi$ zur Erreichung von Stabilität benötigt.

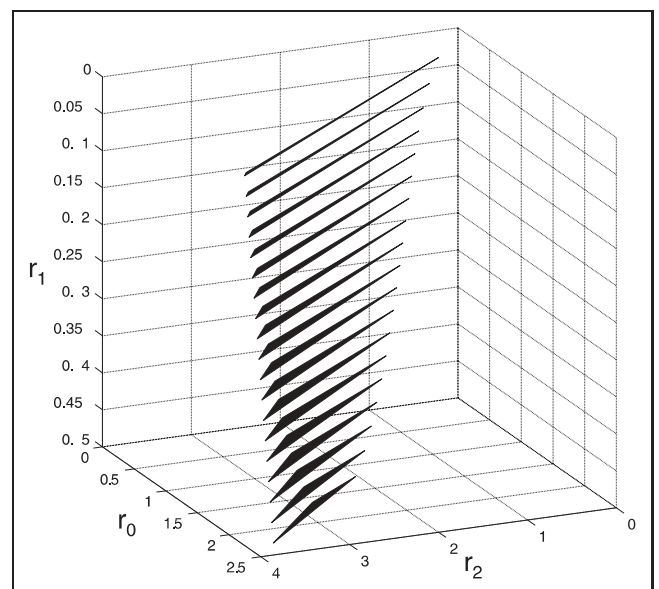


Bild 6: Die Menge aller Schur-stabilen Polygone.

Falls ein stabiles Intervall gefunden wird, kann das gesamte stabile dreidimensionale Gebiet durch Rasterung von r_1 über dieses Intervall gewonnen werden. Für das Beispiel, bei dem die Strecke (24) mit dem Regler (25) stabilisiert wird, ergibt sich das in Bild 6 gezeigte Gebiet im r -Parameterraum.

Beispiel 2. PID-Regelkreis: Gegeben sei wieder die Regelstrecke (24). Zusammen mit dem Regler (4) ergibt sich

$$A(z) = z^3 + 10,98z^2 + 10,98z + 1 \quad (46)$$

$$B(z) = 0,1z^6 - 0,5z^5 + z^4 - z^3 + 0,5z^2 - 0,1z. \quad (47)$$

Mit der Entkopplungsfunktion $E_\Gamma(z) = z$ folgt

$$N = 6, \quad R = 1 + 1 = 2, \quad J = 0, \quad J_+ = 0 \quad \text{und} \quad J_- = 1$$

da $A(z)$ eine Nullstelle innerhalb des Einheitskreises besitzt, eine bei $z = -1$ und eine dritte außerhalb. Also werden $Z \geq 3$ singuläre Frequenzen im Intervall $0 < \alpha < +\pi$ benötigt. Allerdings ist für diesen Fall die maximal mögliche Anzahl an singulären Frequenzen 2, sodass kein PID-Regler existiert, der dieses System stabilisieren kann.

6 Zusammenfassung

Dieser Aufsatz verallgemeinert das im ersten Teil vorgestellte Verfahren zur Bestimmung der Menge aller stabilisierenden PID-Reglerparameter auf zeitdiskrete Systeme. Die Entwurfsmethodik dafür basiert auf der Tatsache, dass sich die Reglerparameter in einem gedrehten Raum bei singulären Frequenzen entkoppeln. Dabei teilt sich die Problematik in die Berechnung stabiler Polygone und die Bestimmung von Intervallen, in denen sich diese Polygone

befinden können. Für die Bestimmung der Intervalle wurde gezeigt, dass für eine vorgegebene Regelstrecke eine bestimmte Anzahl an singulären Frequenzen vorhanden sein muss, um Stabilität zu erreichen. Weiterhin wurden die Ausdrücke für die Übertragungsfunktionen im allgemeinen Fall hergeleitet, und dadurch mögliche wichtige Spezialfälle in der Bewegung der Eigenwerte identifiziert. Ein wichtiges Merkmal des Verfahrens besteht darin, dass die hier eingeführte Entkopplungsfunktion nicht von der Strecke abhängig ist. Somit kann das Verfahren beim Entwurf von robusten PID-Reglern simultan an mehreren Strecken angewendet werden.

Literatur

- [1] ACKERMANN, J.; KAESBAUER, D.; BAJCINCA, N.: Discrete-time robust PID and three-term control XV IFAC World Congress, Barcelona, 2002.
- [2] ACKERMANN, J.; KAESBAUER, D.: Design of robust PID controllers Proc. European Control Conference, Porto, 2001.
- [3] BAJCINCA, N.; HULIN, T.: Menge aller robust stabilisierenden PID-Regler: Methodik und Software (Teil I) at – Automatisierungstechnik, 53(2005), S. 556–564.
- [4] BAJCINCA, N.: The method of singular frequencies for robust design in an affine parameter space Proc. 9th Mediterranean Conference on Control and Automation, Dubrovnik, 2001.
- [5] BAJCINCA, N.: *Robust control methods with applications to steer-by-wire systems*. TU Berlin, Doktorarbeit, 2005.
- [6] HULIN, T.: *Software-Werkzeug zur Auslegung von robusten PID-Reglern*. München, TU München, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Diplomarbeit, 2003.

Manuskripteingang: 3. Januar 2005.

Vorstellung der Autoren in at – Automatisierungstechnik Vol. 53 (2005) 11, Seite 564.