



# Menge aller robust stabilisierenden PID-Regler: Methodik und Software (Teil I)

## The Set of All Robust Stabilizing PID Controllers: Methods and Software (Part I)

Naim Bajcinca und Thomas Hulin

---

Kürzlich wurde gezeigt, dass aufgrund einer Entkopplung der PID-Reglerparameter bei singulären Frequenzen das nichtkonvexe Hurwitz-Stabilitätsgebiet im PID-Parameterraum aus konvexen polygonalen Schnitten zusammengesetzt werden kann. Dadurch teilt sich die Aufgabe zum einen in die Bestimmung der Intervalle, in denen stabile Polygone existieren und zum anderen in die automatische Berechnung dieser Polygone. Das Verfahren kann sowohl auf zeitkontinuierliche als auch auf zeitdiskrete LTI Systeme einschließlich totzeitbehafteter Systeme angewendet werden. Es eignet sich besonders für den Entwurf von PID-Reglern, die robust gegenüber Parameterunsicherheiten in der Regelstrecke sind. Neben einiger weniger offener Fragen ist die zugrunde liegende Theorie weitgehend abgeschlossen. Dieser Artikel ist der erste in einer Reihe von dreien, die die neuesten Ergebnisse, Algorithmen und eine MATLAB<sup>®</sup> Toolbox für die schnelle Berechnung der Stabilitätsgebiete der PID-Regler darstellen.

Computation of Hurwitz-stability regions in the parameter space of PID controllers has been a topic of intensive research in the last decade. The main impetus is given by the fact that non-convex stability regions can be built up by convex polygonal slices with constant  $k_p$ , which is a consequence of decoupling of PID parameter space at singular frequencies. Thereby the computation task splits into two problems: discrimination of  $k_p$ -intervals with stable polygons, and automatic detection of stable polygons for a given  $k_p$ . The method applies for continuous and discrete-time systems, including those with time-delay. It is especially well suited for the design of robust PID controllers for the systems with parametric uncertainties. While some problems still remain open, the theory at this stage is well completed. This is the starting one of a series of three papers, where the newest results, algorithms and a MATLAB<sup>®</sup> toolbox for fast computation of PID controller regions are presented.

**Schlagwörter:** Singuläre Frequenz, PID-Regler, Entkopplung

**Keywords:** Singular frequencies, PID controller, three-term controller, decoupling

---

## 1 Einleitung

Die Klasse der PID-Regler stellt in der Prozesstechnik und der Verfahrenstechnik sowie in vielen Industriebranchen das mit Abstand am häufigsten eingesetzte Reglerkonzept für SISO-Systeme dar. Trotz eines breiten Anwendungsbereiches wurde erst vor kurzem mit der Untersuchung des Problems begonnen, die Menge aller PID-Hurwitz-Regler für eine vorgegebene Regelstrecke zu finden. Es erwies sich als interessantes theoretisches Problem, welches sicherlich

auch für die Praxis von großer Bedeutung ist, wo vor allem der auf Tuning-Regeln basierende Reglerentwurf verwendet wird.

Das dreidimensionale, im allgemeinen Fall nichtkonvexe Stabilitätsgebiet im  $(k_p, k_I, k_D)$ -Parameterraum kann für feste Werte von  $k_p$  in der  $(k_I, k_D)$ -Ebene aus konvexen polygonalen Schnitten aufgebaut werden. Dieses Ergebnis wurde erstmals von den Autoren des Buches [11] gezeigt. Ihr Ansatz basiert auf einer Verallgemeinerung des

Hermite–Biehler-Theorems und wird komplex, sobald die Methode auf Systeme beliebiger Ordnung ausgeweitet wird. Es zeigt sich, dass der alternative, auf singulären Frequenzen beruhende Ansatz, siehe [1] und [2], besser für solche komplexen Aufgaben geeignet ist.

Der vorliegende Beitrag beschreibt die neuesten Ergebnisse zu der auf singulären Frequenzen basierenden PID-Entwurfsmethodik. In den zitierten Artikeln wurde gezeigt, dass der Entwurf von PID-Reglerparametern auf Grund einer möglichen Entkopplung dieser Parameter bei singulären Frequenzen in zwei Teilprobleme aufgeteilt werden kann: (A) die Bestimmung von stabilen Intervallen des Parameters  $k_P$  unabhängig von den Parametern  $k_I$  und  $k_D$ , im Folgenden als das  $k_P$ -Problem bezeichnet, und (B) die Berechnung von stabilen Polygonen in der  $(k_I, k_D)$ -Ebene für ein vorgegebenes  $k_P$ .

Die Veröffentlichung [1] beschreibt u. a. einen allgemeinen Algorithmus zur Lösung des Problems (B), der auf dem Konzept von inneren Polygonen basiert. Dabei wurde die Überquerung von singulären Geraden  $e_{I/D}$  eingeführt (jede singuläre Frequenz entspricht einer singulären Geraden in der  $(k_I, k_D)$ -Ebene; diese Geraden bestimmen die Polygone), um die Bewegung von Eigenwerten zu beschreiben, wenn eine solche Gerade überschritten wird. Der Algorithmus ermittelt die *inneren Polygone* und wählt davon diejenigen mit der maximalen Zahl an stabilen Eigenwerten aus. Von entscheidender Bedeutung ist, dass dieser Algorithmus allgemein gültig ist, also auch für Quasipolynome, die bei der Untersuchung von totzeitbehafteten Systemen entstehen.

Nach dem besten Wissen der Autoren wurde bisher noch keine allgemeine Lösung für das  $k_P$ -Problem vorgestellt. Ein wesentlicher Schritt in diese Richtung wird jedoch in [8] gemacht, da diese Arbeit zeigt, dass die Stabilität einer PID-Reglerschleife in engem Bezug zu dem Konzept der singulären Frequenzen steht. Es stellt sich heraus, dass für eine gegebene Regelstrecke beliebiger Ordnung eine bestimmte Mindestanzahl an singulären Frequenzen für Stabilität vorhanden sein muss. Da der Parameter  $k_P$  eindeutig die Anzahl an singulären Frequenzen bestimmt, können die nicht-stabilen Intervalle des Parameters  $k_P$  anhand der graphischen Darstellung des sog. *Generators der singulären Frequenzen* einfach herausgefunden werden. Die Einfachheit dieses Kriteriums erkaufte man sich jedoch zum Preis der Konservativität, da nur notwendige Bedingungen angegeben werden können. Die stabilen Polygone können nämlich neben den durch das Kriterium bestimmten  $k_P$ -Intervallgrenzen auch in einzelnen Punkten im  $(k_P, k_I, k_D)$ -Parameterraum auftauchen und/oder verschwinden.

Ein zusätzliches wichtiges Merkmal der vorgestellten Methode ist, dass die Orientierung der Schnittebenen, in der sich die Polygone befinden, nicht von der Regelstrecke abhängt. Die direkte Folge daraus ist, dass sie sich sehr gut für die Berechnung von Stabilitätsgebieten einer endlichen Menge von Regelstrecken eignet, innerhalb derer alle Regelstrecken gleichzeitig stabilisiert werden. Dies entspricht

einer robusten Regelung bezüglich Parameterunsicherheiten in der Regelstrecke.

Dieser Artikel ist in drei Teilen geschrieben. Der vorliegende erste Teil konzentriert sich hauptsächlich auf Hurwitz-Stabilität, inklusive totzeitbehafteter Systeme. Für Systeme mit Totzeit entstehen dabei aufgrund des Totzeitterms unendlich viele singuläre Frequenzen und Polygone. Deshalb ist die Einschränkung des Frequenzintervalls wichtig, für das der Algorithmus zur Berechnung der inneren Polygone angewendet wird. Es wird gezeigt, dass mit Ausnahme der unendlichen singulären Frequenzen der Rest der hohen singulären Frequenzen vernachlässigt werden kann. Weiterhin wird die Lösung des  $k_P$ -Problems auf Quasipolynome erweitert.

Im zweiten Teil wird das Verfahren zur Untersuchung von zeitdiskreten Systemen angepasst, während der dritte Teil die MATLAB<sup>®</sup> Toolbox ROBINS (Robust Design based on Singular Frequencies – robuster Entwurf basierend auf singulären Frequenzen) vorstellt, wobei die Theorie und die Algorithmen der ersten beiden Veröffentlichungen automatisiert werden.

## 2 Singuläre Frequenzen

### 2.1 Singuläre Frequenzen und Geraden

Man betrachte das charakteristische Polynom eines Regelkreises aus einem PID-Regler und einer Regelstrecke

$$p = A(s) (k_I + k_P s + k_D s^2) + B(s) \quad (1)$$

mit

$$A(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_m s^m \quad (2)$$

$$B(s) = b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n, \quad (3)$$

wobei  $b_0$  aufgrund des Integrators im Regler verschwindet. Um die Allgemeinheit nicht zu beschränken, soll  $b_0$  jedoch als freier Parameter betrachtet werden. Für den Fall der Hurwitz-Stabilität wird die charakteristische Gleichung auf der imaginären Achse  $s = j\omega$  untersucht. Dadurch ergibt sich das folgende Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} H \\ G \end{bmatrix} = \mathcal{P}_A \begin{bmatrix} 1 & -\omega^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_I \\ k_D \end{bmatrix} + \mathcal{P}_A \begin{bmatrix} 0 \\ \omega k_P \end{bmatrix} + \mathcal{P}_B = 0 \quad (4)$$

mit

$$\mathcal{P}_A = \begin{bmatrix} R_A & -I_A \\ I_A & R_A \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}_B = \begin{bmatrix} R_B \\ I_B \end{bmatrix}.$$

Dabei stehen  $H$  und  $G$  bzw.  $R$  und  $I$  für den Real- und Imaginärteil des charakteristischen Polynoms (1) bzw. der Polynome  $A$  und  $B$ . Für ein festes  $k_P$  bildet (4) die imaginäre Achse  $j\omega$  in der  $(k_I, k_D)$ -Ebene ab. Das Besondere an dieser Abbildung ist, dass auf der ganzen imaginären Achse die folgende *Rang-Bedingung* gilt

$$\text{Rg} \frac{\partial(H, G)}{\partial(k_I, k_D)} = \text{Rg} \mathcal{P}_A \begin{bmatrix} 1 & -\omega^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \forall \omega. \quad (5)$$

Die geometrische Interpretation dieser Bedingung (5) ist, dass jede Frequenz  $\omega$  auf zwei zueinander parallelen Geraden in der  $(k_I, k_D)$ -Ebene abgebildet wird. Daher ist  $s = j\omega$  genau dann eine Wurzel des Polynoms (1), wenn diese beiden Geraden aufeinander fallen (*Wurzel-Bedingung*). Eine Frequenz  $\omega'$ , die diese beiden Bedingungen erfüllt, heißt *singuläre Frequenz* oder *isolierte Frequenz*. Jede singuläre Frequenz kann also auf eine Gerade in der  $(k_I, k_D)$ -Ebene abgebildet werden, die als *singuläre Gerade* bezeichnet wird. In anderen Worten: die Eigenwerte des Systems können die imaginäre Achse ausschließlich bei singulären Frequenzen überqueren. Dabei stellen die singulären Geraden die entsprechenden Grenzen in der  $(k_I, k_D)$ -Ebene dar und bilden konvexe Polygone.

Weiterhin sei  $\mathcal{F}(p) = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  eine endliche Menge an Polynomen, mit

$$p_v = A_v(s) (k_I + k_P s + k_D s^2) + B_v(s). \quad (6)$$

Diese Menge könnte beispielsweise ein Satz von Kharitonov-Polynomen oder ein Multimodell der Regelstrecken mit Parameterunsicherheiten sein. Der folgende Satz sagt aus, dass die Orientierung der Schnittebenen, in denen Polygone entstehen, nicht von der Regelstrecke abhängen [1].

**Satz 1** Für die Menge an Polynomen (6) hängt die Rang-Bedingung (5) nicht von den Polynomen  $A_v(s)$  und  $B_v(s)$  ab.

Allerdings beeinflussen  $A_v(s)$  und  $B_v(s)$  die Wurzel-Bedingung, d. h. die singulären Frequenzen auf der imaginären Achse. Daher erzeugen verschiedene Polynome  $p_v$  für ein festes  $k_P$  verschiedene stabile Polygone  $\Pi_v$ . Die Menge an Reglern, welche die Regelstrecken der Familie  $\mathcal{F}(p)$  gleichzeitig (robust) stabilisieren, ergibt sich einfach aus der Schnittmenge dieser Polygone.

## 2.2 Entkopplung von PID-Reglern

Da  $\mathcal{P}_A$  nicht singulär ist, kann (4) in die äquivalente Form

$$\begin{bmatrix} 1 & -\omega^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_I \\ k_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix} k_P + \mathcal{P} = 0 \quad (7)$$

umgewandelt werden, mit

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_A^{-1} \mathcal{P}_B = \frac{1}{R_A^2 + I_A^2} \begin{bmatrix} R_A R_B + I_A I_B \\ R_A I_B - I_A R_B \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Die Darstellungsweise (7) ist besonders nützlich, da dadurch der PID-Regler in zwei Gleichungen *entkoppelt* wird. Der Imaginärteil

$$k_P = -\frac{R_A I_B - I_A R_B}{\omega (R_A^2 + I_A^2)} \quad (9)$$

wird als *Generator der singulären Frequenzen* bezeichnet, da er für ein gegebenes  $k_P$  die singulären Frequenzen auf der imaginären Achse bestimmt. Der Realteil

$$k_I - \omega^2 k_D = -\frac{R_A R_B + I_A I_B}{R_A^2 + I_A^2} \quad (10)$$

wird als *Generator der singulären Geraden* benannt, da dieser die singulären Geraden in der  $(k_I, k_D)$ -Ebene definiert, wobei jede singuläre Gerade einer singulären Frequenz entspricht. Die Tatsache, dass charakteristische Gleichungen von PID-Regelkreisen bei singulären Frequenzen  $j\omega'$  durch die beiden Gleichungen (9) und (10) äquivalent dargestellt werden können, wird als *Entkopplung von PID-Reglern bei singulären Frequenzen* bezeichnet. Dieser Effekt ist für die Methode wesentlich, da er den Reglerentwurf in zwei Teilprobleme aufspaltet: (A) Die Bestimmung von stabilen Intervallen des Parameters  $k_P$  und (B) die Berechnung der stabilen Polygone in der  $(k_I, k_D)$ -Ebene. Der Rest dieser Veröffentlichung konzentriert sich grundsätzlich auf diese beiden Probleme.

**Bemerkung 1** Für den Fall  $a_0 \neq 0$  lässt sich anhand der Gleichungen (2) und (3) zeigen, dass für  $s = 0$  eine singuläre Gerade bei

$$k_I = -b_0/a_0 \quad (11)$$

entsteht. Dabei konvergiert der Generator der singulären Frequenzen  $k_P = k_P(\omega)$  zu

$$k_P = (a_1 b_0 - a_0 b_1)/a_0^2. \quad (12)$$

Eine *infinite Wurzelgrenze* (singuläre Gerade einer unendlich hohen singulären Frequenz) für  $s \rightarrow \infty$  tritt jedoch genau dann bei

$$k_D = -b_n/a_m \quad (13)$$

auf, wenn  $n \leq m + 2$ . Auch hier konvergiert  $k_P = k_P(\omega)$ , und zwar zu

$$k_P = (a_{m-1} b_n - a_m b_{n-1})/a_m^2. \quad (14)$$

In anderen Worten kann aus dem Verhalten des Graphen des Generators der singulären Frequenzen  $k_P = k_P(\omega)$  direkt die Information über die Existenz der singulären Frequenzen bei  $s = 0$  und  $s = \infty$  abgelesen werden.

*Beispiel 1:* Gegeben sei das Polynom (1) mit

$$A(s) = -0,5s^4 - 7s^3 - 2s + 1,$$

$$B(s) = s^7 + 11s^6 + 46s^5 + 95s^4 + 109s^3 + 74s^2 + 24s. \quad (15)$$

Damit ergibt sich der Generator der singulären Frequenzen (siehe Bild 1) zu

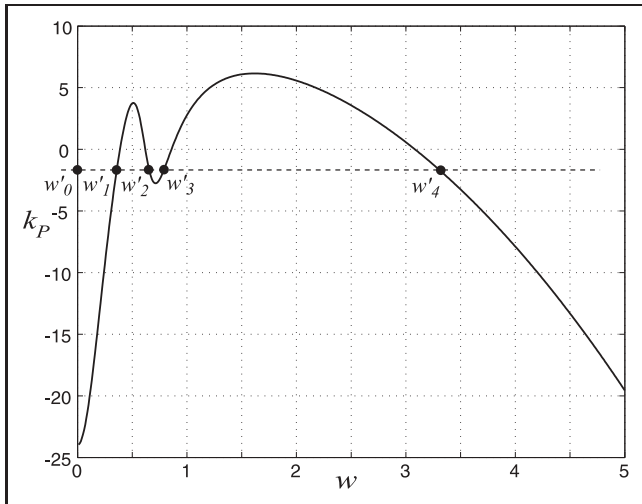
$$k_P = \frac{-96 + 1028\omega^2 - 2968\omega^4 + 2534\omega^6 - 216\omega^8 - 2\omega^{10}}{4 - 116\omega^4 + \omega^8 + 16\omega^2 + 196\omega^6}. \quad (16)$$

Die singulären Frequenzen für beispielsweise  $k_P = -2$  können mit (16) direkt berechnet werden zu

$$\omega'_0 = 0, \quad \omega'_1 = 0,3530, \quad \omega'_2 = 0,6638,$$

$$\omega'_3 = 0,7742, \quad \omega'_4 = 3,3473.$$

Man beachte, dass mit Hilfe von Bild 1 für ein festes  $k_P$  die Anzahl an singulären Frequenzen sehr einfach abge-



**Bild 1:** Generator der singulären Frequenzen, Beispiel 1.

lesen werden kann (die singulären Frequenzen bestimmen sich durch die Schnittpunkte des Generators der singulären Frequenzen mit der Geraden  $k_P = \text{const}$ ). □

### 3 Stabile Polygone

#### 3.1 Innere Polygone

Für ein festes  $k_P$  sei eine Menge an singulären Geraden

$$\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N\} \tag{17}$$

gegeben, die den singulären Frequenzen

$$\Omega = \{\omega'_0, \omega'_1, \dots, \omega'_N\} \tag{18}$$

entsprechen. Die Aufgabenstellung dieses Abschnittes kann folgendermaßen zusammengefasst werden: Bestimme die Polygone, die gleichzeitig alle Polynome  $p_v$  in (6) stabilisieren. Der hier vorgestellte Lösungsweg stützt sich auf das Konzept der *inneren Polygone*, die wie folgt definiert sind.

**Definition 1** Man betrachte ein Polygon  $\Pi$ , das durch eine Menge an singulären Geraden  $\{\lambda_i\}$  definiert ist, mit  $\lambda_i = \lambda(\omega'_i)$ .  $\Pi$  heißt *inneres Polygon*, wenn bei jeder Überquerung über  $\lambda_i$  von außen nach innen bezüglich des Polygons ein Eigenwert-Paar das Hurwitz-Gebiet bei  $\pm j\omega'_i$  betritt.

Ein stabiles Polygon ist ein inneres Polygon, aber nicht notwendigerweise umgekehrt. Damit diese Beziehung hinreichend wird, muss die Stabilität eines beliebigen Reglers innerhalb des Polygons  $\Pi$  überprüft werden. Wenn der Stabilitätstest fehlschlägt, dann existiert kein stabiler Regler für das gewählte  $k_P$ , andernfalls ist  $\Pi$  stabil.

#### 3.2 Überquerung von singulären Geraden

Um die Bestimmung der inneren Polygone zu automatisieren, wird jeder singulären Geraden  $\lambda(\omega')$  eine Über-

querungsfunktion  $e$  zugeordnet: wenn bei der Überquerung  $[\delta k_I, \delta k_D]$  über die singuläre Gerade ein Eigenwert stabil wird, dann ist  $e$  negativ, ansonsten positiv. Grundsätzlich wird die Überquerungsfunktion  $e$  genutzt, um herauszufinden, welche Seite einer singulären Gerade „stabiler“ ist. Nun entspreche  $e_I$  der differentiellen Bewegung  $\delta k_I > 0, \delta k_D = 0$  und  $e_D$  analog  $\delta k_D > 0, \delta k_I = 0$ . Eine ausführliche Diskussion der Überquerungsfunktion im allgemeinen Fall ist im zweiten Teil dieser Arbeit zu finden. Dort wird für die Hurwitz-Stabilität folgende Formel für  $e_{I/D}$  hergeleitet werden

$$e_{I/D} = \left. \frac{\partial(H, G)}{\partial(\omega, k_{I/D})} \right|_{\omega'} \tag{19}$$

Die Ausdrücke  $e_{I/D}$  nach dieser Definition hängen nicht von der Position ab, an der die singuläre Gerade überquert wird. Um dies zu zeigen, wird (19) zunächst in die äquivalente Form

$$e_{I/D} = \frac{\partial k_P}{\partial \omega} \left. \frac{\partial(H, G)}{\partial(k_P, k_{I/D})} \right|_{\omega'} \tag{20}$$

gebracht, wobei  $k_P = k_P(\omega)$  der Generator der singulären Frequenzen ist. Es kann gezeigt werden, dass die Determinante in (20) unabhängig von  $k_I$  und  $k_D$  ist. Weiterhin ergibt sich Folgendes

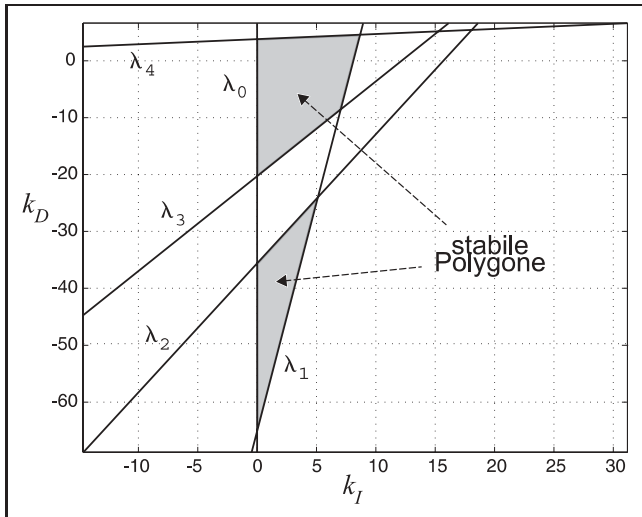
$$\text{sign } e_I = -\text{sign} \left. \frac{\partial k_P}{\partial \omega} \right|_{\omega'}, \quad \text{sign } e_D = \text{sign} \left. \frac{\partial k_P}{\partial \omega} \right|_{\omega'} \tag{21}$$

wobei zu erkennen ist, dass die Überquerungsfunktionen  $e_I$  und  $e_D$  unabhängig von den Parametern  $k_I$  und  $k_D$  sind, und ihr Vorzeichen ausschließlich durch die Ableitung des Generators der singulären Frequenzen  $k_P = k_P(\omega)$  bei der entsprechenden singulären Frequenz bestimmt wird.

#### 3.3 Bestimmung der inneren Polygone

Auf der theoretischen Grundlage des vorherigen Abschnittes kann nun der Algorithmus zur Bestimmung der inneren Polygone vorgestellt werden. Man nehme an, dass die Polygone  $\Pi$  als eine geordnete Menge ihrer Kanten  $\delta(\lambda_i)$  definiert sind, z.B. im Uhrzeigersinn  $\Pi = \{\delta(\lambda_1), \delta(\lambda_2), \dots, \delta(\lambda_N)\}$ , wobei das Ende einer Kante auf den Anfangspunkt der nächsten fällt. Die Anfangspunkte sind durch die Koordinaten  $(I_1(\lambda_i), D_1(\lambda_i))$  definiert, und die Endpunkte durch  $(I_2(\lambda_i), D_2(\lambda_i))$ . Dann ist das Polygon  $\Pi$  genau dann ein inneres Polygon, wenn für jede seiner Kanten  $\lambda_i$  mit  $i \in [1, \dots, N]$  das Vorzeichen der Überquerungsfunktion  $e_I(\lambda_i)$  entgegengesetzt dem der entsprechenden Differenz  $D_2(\lambda_i) - D_1(\lambda_i)$  ist. Äquivalent gilt, dass für alle  $i \in [1, \dots, N]$  die Überquerungsfunktion  $e_D(\lambda_i)$  entgegengesetztes Vorzeichen besitzen muss, wie die Differenz  $I_2(\lambda_i) - I_1(\lambda_i)$ , damit  $\Pi$  inneres Polygon ist.

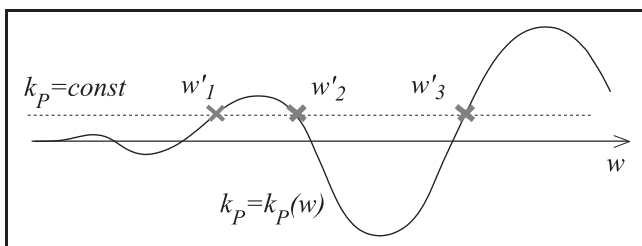
*Beispiel 1 (Fortsetzung):* In Bild 2 sind die singulären Geraden in der Ebene  $k_P = -2$  und die resultierenden stabilen Polygone dargestellt. □



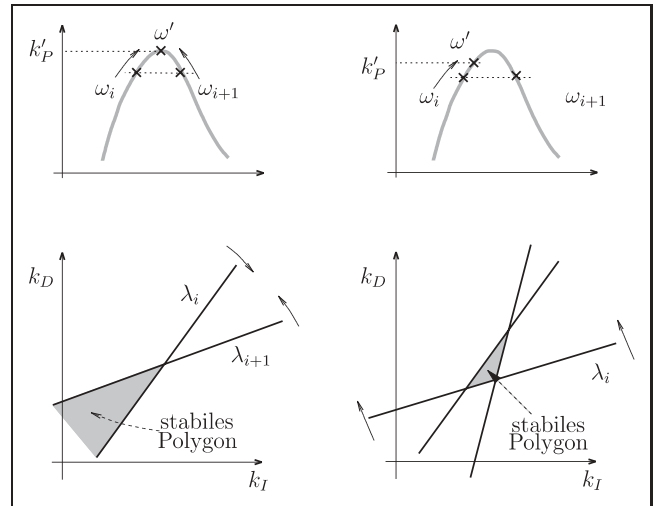
**Bild 2:** Singuläre Geraden und die durch sie begrenzten stabilen Polygone, Beispiel 1.

### 4 Das $k_P$ -Problem

Dieser Abschnitt konzentriert sich auf das  $k_P$ -Problem, also die Bestimmung der  $k_P$ -Intervalle, in denen stabile PID-Regler vorkommen können. Eine Regel dafür würde das nutzlose Rastern von solchen  $k_P$ -Intervallen verhindern, in denen ohnehin kein stabiles Polygon vorkommen kann. Da physikalisch jede Kante eines Polygons durch eine singuläre Frequenz dargestellt wird, ist es nahe liegend nach einer Beziehung zwischen der Anzahl der singulären Frequenzen und einer Stabilitätsbedingung zu suchen. Aus Bild 3 geht hervor, dass die Anzahl der singulären Frequenzen in den Intervallen zwischen den Extrema von  $k_P(\omega)$  jeweils konstant ist. Weiter veranschaulicht Bild 4 links die Situation, wenn zwei singuläre Frequenzen  $\omega'_i$  und  $\omega'_{i+1}$  sich aufeinander zu bewegen und sich bei  $\omega'$  treffen. Dabei kommen sich die beiden, zu den singulären Frequenzen gehörenden Geraden  $\lambda_i$  und  $\lambda_{i+1}$  näher und treffen sich schließlich bei der Gerade  $\lambda' = \lambda(\omega')$ . Dadurch schließen und verschwinden alle Polygone, die durch diese beiden Geraden definiert sind. Beim Verlassen des stabilen Gebietes (schattierter Bereich in Bild 4) in  $k_P$ -Richtung, also bei der Überquerung von  $\lambda'$  wird ein Eigenwertepaar instabil. Diese Überlegungen gelten entsprechend auch für die Minima von  $k_P = k_P(\omega)$ . Daher beinhaltet das  $k_P$ -Intervall mit der maximalen Zahl an singulären Frequenzen am wahrscheinlichsten auch die stabilen Polygone (siehe [6]).



**Bild 3:** Ein typischer Generator der singulären Frequenzen  $k_P = k_P(\omega)$ .



**Bild 4:** Zwei verschiedene Szenarien für sich öffnende/schließende stabile Polygone.

Der unten stehende Satz bekräftigt diese Schlussfolgerung (siehe [8]). Dafür wird jedoch zunächst Definition 2 und Lemma 1 benötigt:

**Definition 2** Die Funktion  $E : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$  bildet eine rationale Zahl zur nächst kleineren oder gleichen geraden Zahl ab.

**Lemma 1** Gegeben sei die Mikhailov-Ortskurve einer rationalen Funktion  $F(s)$  mit  $F(j\omega) \neq 0$  für  $0 \leq \omega < +\infty$ . Beträgt die Winkeländerung des Mikhailov-Vektors  $F(j\omega) = N\pi/2$ , so schneidet die Ortskurve die reelle Achse mindestens  $Z$ -mal, wobei

$$Z = \frac{E(N + 1)}{2} \tag{22}$$

**Satz 2** Gegeben sei das charakteristische Polynom (1). Man nehme an, dass das Polynom  $A(s)$  keine Nullstellen auf der imaginären Achse  $j\omega$  besitzt und es sei

- $N$ : die Ordnung des Polynoms (1)
- $M$ : die Ordnung des Polynoms  $A(s)$
- $P$ : die Anzahl der rechtsseitigen Nullstellen von  $A(s)$
- $Z$ : die Anzahl der singulären Frequenzen auf dem Intervall  $0 \leq \omega < +\infty$ .

Eine notwendige Bedingung für die Stabilität von (1) ist

$$Z \geq \frac{E(N - M + 2P + 1)}{2} \tag{23}$$

*Beweis.* Man betrachte die Funktion

$$F(s) = \frac{p(s)}{A(s)} = k_I + k_P s + k_D s^2 + \frac{B(s)}{A(s)}, \tag{24}$$

die der entkoppelten Matrix-Gleichung (7) entspricht. So ist ihr Imaginärteil mit  $s = j\omega$  der Generator der singulären Frequenzen (9). Die Mikhailov-Ortskurve  $F(j\omega)$  kreuzt die reelle Achse genau bei der singulären Frequenz  $\omega'_i$ . Wenn  $p(s)$  stabil ist, dann ergibt die Anwendung des Grundsatzes des Arguments auf einem großen Halbkreis auf der rechten Seite der  $s$ -Ebene

$$\Delta\phi_F = (N - M)\pi + 2P\pi, \tag{25}$$

wobei  $\Delta\phi_F$  die Winkeländerung der Funktion  $F(j\omega)$  auf der imaginären Achse darstellt. Da sich  $\omega$  von 0 nach  $+\infty$  ändert, wird nach Lemma 1 die Ortskurve  $F(j\omega)$  die reelle Achse mindestens  $E(N - M + 2P + 1)/2$  mal schneiden.  $\square$

Mit diesem Satz können aus dem Graphen von (9) direkt die  $k_P$ -Intervalle abgelesen werden, die gerastert werden müssen. Man beachte, dass  $Z$  die singuläre Frequenz bei  $s = 0$  beinhaltet, falls diese existiert. Allerdings kann ihre Existenz nach Bemerkung 1 direkt anhand der Konvergenz des Graphen  $k_P = k_P(\omega)$  bei  $\omega = 0$  festgestellt werden.

Der folgende Satz stellt eine Verallgemeinerung dar, falls Nullstellen des Polynoms  $A(s)$  auf der imaginären Achse auftreten. Um eine Fallunterscheidung zu vermeiden wird hier allerdings auf die Zählung der singulären Frequenz bei  $s = 0$  verzichtet.

**Satz 3** *Betrachtet werde nun der Fall, dass  $A(s)$  genau  $J$  Nullstellen unterschiedlich von Null auf der imaginären Achse und eine  $J_0$ -fache Nullstelle bei  $s = 0$  besitzt. Dann benötigt man für die Stabilisierung des Polynoms (1)*

$$Z \geq \frac{E(N - M + 2P + J - 1) + E(J_0)}{2} \quad (26)$$

positive singuläre Frequenzen.  $\square$

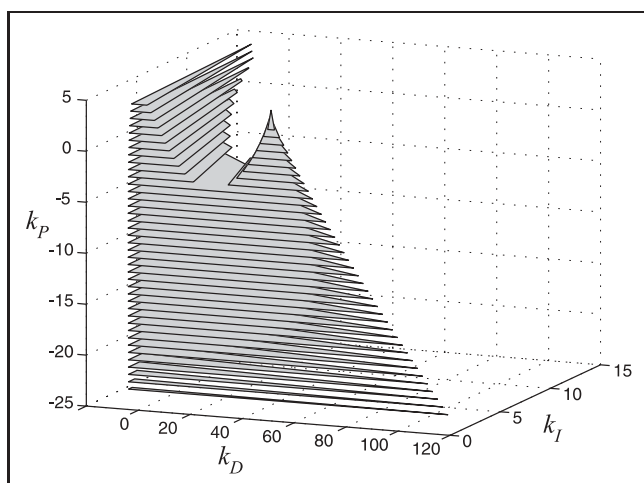
*Beispiel 1 (Fortsetzung):* Man betrachte wieder die Polynome (15). Dafür ergibt sich:  $N = 7, M = 4, P = 1$ . Nach Satz 2 sind somit für die Stabilität mindestens drei singuläre Frequenzen im Intervall  $\omega \geq 0$  erforderlich. Aus Bild 1 geht hervor, dass diese Bedingung für  $-24 < k_P < 6,1565$  erfüllt ist. Genauer:

$$-24 < k_P < -2,7614 \Rightarrow 3 \text{ sing. Frequenzen}$$

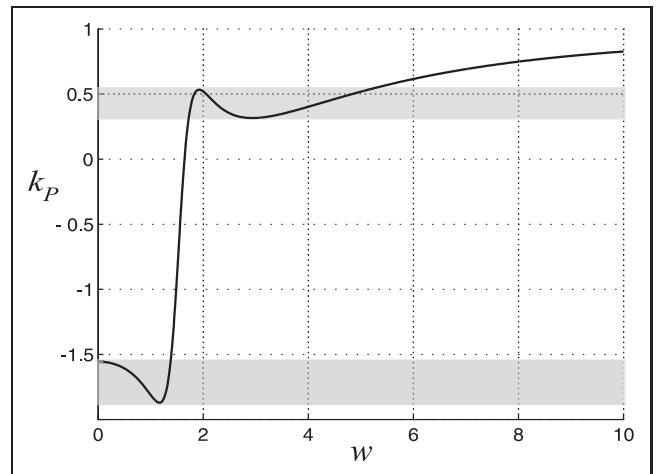
$$-2,7614 < k_P < 3,7664 \Rightarrow 5 \text{ sing. Frequenzen}$$

$$3,7664 < k_P < 6,1565 \Rightarrow 3 \text{ sing. Frequenzen.}$$

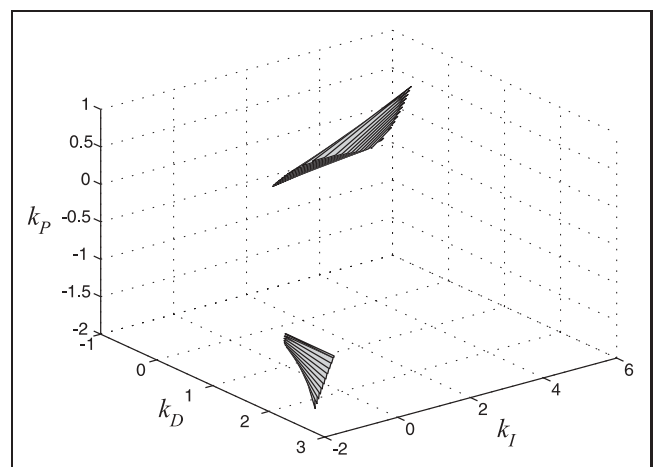
Durch Rastern von  $k_P$  innerhalb dieses Intervalls erhält man zusammengesetzt aus den polygonalen Schnitten das gesamte stabile Gebiet (siehe Bild 5).  $\square$



**Bild 5:** Menge aller stabilisierenden PID-Regler, Beispiel 1.



**Bild 6:** Generator der singulären Frequenzen, Beispiel 2.



**Bild 7:** Menge aller stabilisierenden PID-Regler, Beispiel 2.

*Beispiel 2 Getrennte stabile  $k_P$ -Intervalle:* Gegeben sei Polynom (1) mit

$$A(s) = s^3 + 3s^2 + 9$$

$$B(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 7s^2 + 14s.$$

Daraus kann direkt abgelesen werden, dass  $N = 5, M = 3$  und  $P = 2$ . Nach Satz 2 sind somit mindestens drei singuläre Frequenzen im Intervall  $\omega \geq 0$  erforderlich. Betrachtet werde nun Bild 4, das den Generator der singulären Frequenzen darstellt. Darin sind die  $k_P$ -Intervalle, in denen die Bedingung erfüllt ist, schattiert dargestellt, nämlich

$$-1,8708 < k_P < -1,5556 \Rightarrow 3 \text{ sing. Frequenzen}$$

$$0,3157 < k_P < 0,5333 \Rightarrow 4 \text{ sing. Frequenzen.}$$

Für andere  $k_P$  existieren keine stabilen Polygone. Das resultierende stabile Gebiet wird in Bild 7 gezeigt.  $\square$

*Beispiel 3 Fehlende Stabilität:* Es sei

$$A(s) = 1$$

$$B(s) = s^5 + s^4 - 3s^3 - s^2 + 2s.$$

Satz 2 erfordert mindestens 3 singuläre Frequenzen. Allerdings existieren für  $k_P < -2$  nur 2 singuläre Frequenzen, ansonsten lediglich eine. Folglich ist das Polynom (1) immer instabil unabhängig von  $k_P, k_I$  und  $k_D$ .  $\square$

Die  $k_P$ -Intervalle, gegeben durch Satz 2 und Satz 3, können konservativ sein, falls sich stabile Polygone in einzelnen Spitzen im  $(k_P, k_I, k_D)$ -Parameterraum schließen bzw. öffnen. Bild 4 zeigt auf der rechten Seite eine solche Situation. Dort bewegt sich die singuläre Gerade  $\lambda_i$  für  $\omega_i \rightarrow \omega'$  derart, dass sich das stabile Polygon in einem Punkt schließt und verschwindet. Solch ein Vorgang wird vom oben genannten Satz nicht berücksichtigt.

*Beispiel 4* Man betrachte nun die Polynome

$$A(s) = 1890s^2 + 658s + 215,$$

$$B(s) = s^8 + \frac{1032}{25}s^7 + \frac{6\,175\,327}{10\,000}s^6 + \frac{98\,620\,159}{25\,000}s^5 + \dots$$

$$\frac{92\,785\,263}{10\,000}s^4 + \frac{97\,588\,159}{25\,000}s^3 + \frac{5\,413\,746}{625}s^2.$$

Für  $k_P = -9$  und  $k_P = -10$  existieren  $Z = 4$  nicht negative singuläre Frequenzen. Damit ist die Stabilitätsbedingung (23) erfüllt, da  $N = 8, M = 2$  und  $P = 0$ . Für  $k_P = -9$  gibt es ein stabiles Polygon, für  $k_P = -10$  jedoch nicht. Somit muss sich das stabile Polygon in einer Spitze (wie in Bild 4 rechts dargestellt) für ein  $k_P$  zwischen  $-9$  und  $-10$  schließen.  $\square$

An einer Spitze besitzt das Polynom (1) mindestens drei unterschiedliche Nullstellen auf der imaginären Achse, d. h.

$$A(s)(k_I + k_P s + k_D s^2) + B(s) = R(s) \prod_{i=1,2,3} (s^2 + \omega_i^2), \quad (27)$$

wobei  $R(s)$  ein Hurwitz-Polynom sein muss. Im allgemeinen Fall stellt (27) ein System von  $N$  nichtlinearen Gleichungen mit  $N$  Unbekannten dar. Diese bestehen aus den Reglerparametern  $k_P, k_I, k_D$ , den singulären Frequenzen

$\{\omega'_i, i = 1, 2, 3\}$  und den  $N - 6$  Koeffizienten des Polynoms  $R(s)$ . Eliminiert man die letzten  $N - 3$  Variablen ergibt sich ein nichtlineares System mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten  $k_P, k_I, k_D$  dessen Lösungen die endlich vielen Spitzen im  $(k_I, k_P, k_D)$  Parameterraum darstellen. Natürlich sind dabei nur die Spitzen innerhalb des über Satz 2 bzw. Satz 3 bestimmten Intervalls relevant.

*Beispiel 4 (Fortsetzung):* Wendet man dieses Verfahren auf die Polynome  $A(s)$  und  $B(s)$  an, so ergibt sich nur eine Spitze bei  $k_P \approx -9,0023$ . Die drei Geraden mit dem gemeinsamen Schnittpunkt bei  $k_I \approx 21,4958, k_D \approx 3,0195$  werden in Bild 8 dargestellt. Die entsprechenden singulären Frequenzen sind  $\omega'_1 \approx 0,2581, \omega'_2 \approx 0,44261$  und  $\omega'_3 \approx 9,7621$ .  $\square$

## 5 Totzeitsysteme

In diesem Abschnitt wird die Theorie der vorangegangenen Abschnitte auf Systeme mit Totzeit übertragen. Solche Systeme führen zu Quasipolynomen der Form

$$p = A(s) (k_I + k_P s + k_D s^2) + B(s)e^{Ls} \quad (28)$$

mit der Totzeit  $L > 0$ . Fundamentale Stabilitätsbedingungen bezüglich Quasipolynomen werden in [7] gegeben. Eine darin gegebene notwendige Bedingung ist die Existenz des Hauptterms, welcher sich aus dem Produkt von  $e^{Ls}$  aus Gleichung (28) und der höchsten Potenz von  $s$  ergibt. Daher werde für den Rest dieser Veröffentlichung angenommen, dass  $n \geq m + 2$  gelte, d. h. es werden nur Quasipolynome des verzögerten ( $n > m + 2$ ) und des neutralen Typs ( $n = m + 2$ ) betrachtet.

Es ist einfach zu überprüfen, dass die Entkopplungsbedingungen auch für Quasipolynome der Form (28) gelten. Beispielsweise wird die Entkopplung des Quasipolynoms (28) bei singulären Frequenzen durch Gleichung (7) beschrieben, wobei

$$\mathcal{P} = -\mathcal{P}_A^{-1} \begin{bmatrix} \cos \omega L & -\sin \omega L \\ \sin \omega L & \cos \omega L \end{bmatrix} \mathcal{P}_B. \quad (29)$$

Mit den Definitionen

$$\alpha(\omega) = \text{abs } \mathcal{P} = \sqrt{\frac{R_B^2 + I_B^2}{R_A^2 + I_A^2}},$$

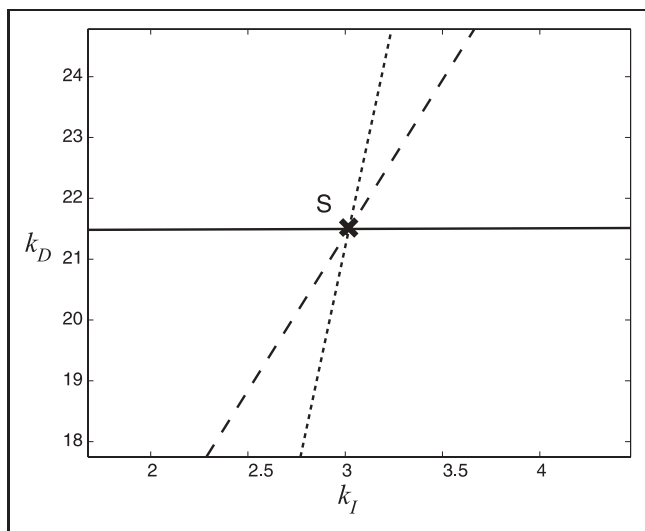
$$\phi(\omega) = \arg \mathcal{P} = \frac{R_A I_B - I_A R_B}{R_A R_B + I_A I_B}$$

ergibt sich für den Generator der singulären Frequenzen

$$\omega k_P = \alpha(\omega) \sin(\omega L + \phi(\omega)) \quad (30)$$

und für den Generator der singulären Geraden entsprechend

$$k_I - \omega^2 k_D = \alpha(\omega) \cos(\omega L + \phi(\omega)). \quad (31)$$



**Bild 8:** Die Spitze S bei  $k_P \approx -9,0023$ , Beispiel 4.

### 5.1 Verhalten bei hohen Frequenzen

**Hohe singuläre Frequenzen.** Mit der oben getroffenen Annahme, dass der Grad des Polynoms  $B(s)$  um mindestens zwei größer sein muss als der von  $A(s)$ , folgt aus Gleichung (30) für hohe Frequenzen  $\omega \rightarrow \infty$

$$\alpha(\omega) \sim \omega^r, \quad r \geq 2 \tag{32}$$

und

$$\tan \phi(\omega) \rightarrow \begin{cases} \pm\infty \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \phi(\omega) \rightarrow \begin{cases} \pm \frac{\pi}{2} \\ 0 \text{ oder } \pi \end{cases} \tag{33}$$

Damit ergibt sich für ein festes  $k_P = \text{const.}$  aus Gleichung (30)

$$\sin(\omega L + \phi(\omega)) \rightarrow \frac{1}{k_P} \omega^{1-r} \rightarrow 0, \tag{34}$$

d. h. hohe singuläre Frequenzen bestimmen sich zu

$$\omega \rightarrow \begin{cases} k\pi/L, \\ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi/L, \quad k \in \mathbb{N}, k \gg 1 \end{cases} \tag{35}$$

und bei ihnen gilt

$$\cos(\omega L + \phi(\omega)) \rightarrow \pm 1. \tag{36}$$

**Infinite Wurzelgrenzen.** Wird die Bedingung  $\omega \rightarrow \infty$  auf (31) angewendet, um die singulären Geraden zu untersuchen, so ergibt sich auf Grund von (36)

$$k_D = \pm \frac{\alpha(\omega)}{\omega^2} \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \tag{37}$$

Für Quasipolynome neutraler Art  $n = m + 2$ , d. h.  $r = 2$ , konvergieren die singulären Geraden zu

$$k_D = \pm \frac{b_n}{a_m} \tag{38}$$

und repräsentieren die *infiniten Wurzelgrenzen*. In allen anderen Fällen divergieren die singulären Geraden nach unendlich. Für Werte auf den infiniten Wurzelgrenzen liegen unendlich viele Eigenwerte beliebig nahe der imaginären Achse.

**Überquerung singulärer Geraden.** Die Anwendung der zweiten Gleichung von (21) auf eine singuläre Gerade mit hoher Frequenz

$$k_D = -\frac{\alpha(\omega)}{\omega^2} \cos(\omega L + \phi(\omega)) \tag{39}$$

ergibt

$$e_D = -\omega L \alpha(\omega) \cos(\omega L + \phi(\omega)). \tag{40}$$

Daher besitzen  $e_D$  und  $k_D$  das gleiche Vorzeichen.

### 5.2 Relevanter Frequenzbereich

Gemäß (21) bestimmt sich das Vorzeichen der Überquerungsfunktion  $e_{I/D}$  bei einer singulären Frequenz  $\omega'$  durch die Steigung der Funktion  $k_P = k_P(\omega)$  an der Stelle  $\omega'$ . In Folge dessen besitzt  $e_{I/D}$  für benachbarte singuläre Fre-

quenzen, die sich für ein festes  $k_P$  ergeben, umgekehrtes Vorzeichen. Dies legt die Definition einer Menge von ungeraden  $\Omega_o$  und geraden  $\Omega_e$  singulären Frequenzen nahe:

$$\Omega_o = \{\omega'_1, \omega'_3, \omega'_5, \dots\} \tag{41}$$

$$\Omega_e = \{\omega'_0, \omega'_2, \omega'_4, \dots\}$$

mit

$$0 = \omega'_0 < \omega'_1 < \omega'_2 < \omega'_3 < \dots < \infty. \tag{42}$$

Das Vorzeichen der Überquerungsfunktion  $e_{I/D}$  muss nur für eine singuläre Frequenz (z. B. die der singulären Geraden für  $\omega' = 0$ ) berechnet werden, für den Rest kann es damit direkt abgeleitet werden. Das Vorzeichen ist für alle geraden singulären Frequenzen gleich  $\Omega_e$ , und entgegengesetzt dem der ungeraden singulären Frequenzen  $\Omega_o$ . Der Schnitt einer singulären Gerade mit  $k_I = 0$  ergibt sich aus (30) und (31) zu

$$k_D(0) = -\frac{k_P}{\omega' \tan(\omega' L + \phi(\omega'))} \tag{43}$$

und trennt die singulären Geraden in zwei Gruppen. Für Quasipolynome der verzögerten Art (es gibt keine infiniten Wurzelgrenzen) divergiert für  $\omega \rightarrow \infty$  die eine Gruppe nach  $k_D(0) = +\infty$ , die andere nach  $k_D(0) = -\infty$ . Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, dass das Überquerungsvorzeichen der Gruppe mit  $k_D(0) > 0$  positiv ist, d. h. der Bereich  $k_D < k_D(0)$  ist für diese Gruppe „stabiler“. In gleicher Weise ist  $k_D > k_D(0)$  „stabiler“ für singuläre Geraden mit  $k_D < 0$ . Folglich sind die singulären Geraden der höheren Frequenzen irrelevant.

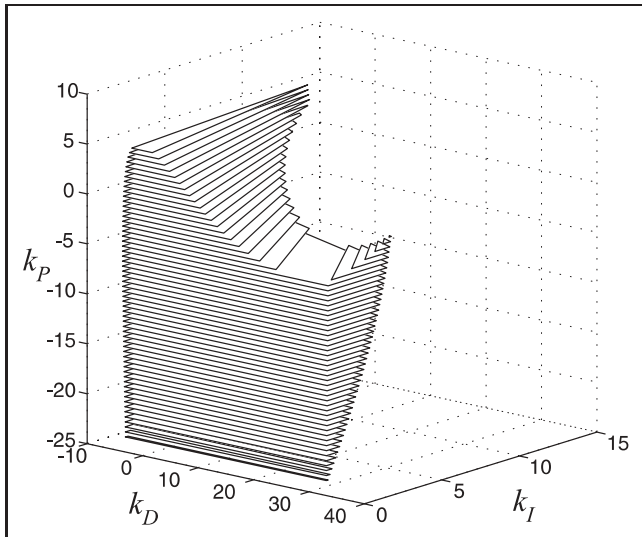
Gleiches gilt auch für Quasipolynome neutraler Art, obwohl die infiniten Wurzelgrenzen  $\lambda_\infty^+$  und  $\lambda_\infty^-$ , (37) die stabilen Polygone beeinflussen können. Doch auch hier liegen die stabilen Polygone wieder zwischen  $\lambda_\infty^+$  und  $\lambda_\infty^-$ . Daraus kann geschlossen werden, dass stabile innere Polygone durch niederfrequente singuläre Geraden und infinite Wurzelgrenzen bestimmt werden, sofern diese existieren.

So wurde beispielsweise in [9] gezeigt, dass für einen PID-Regler zur Stabilisierung der Regelstrecke erster Ordnung,  $g(s) = K/(Ts + 1)e^{-Ls}$ , nur die ersten beiden singulären Frequenzen und die infiniten Wurzelgrenzen relevant sind. Eine allgemeingültige Regel zur Bestimmung des relevanten Frequenzbereichs anzugeben, erweist sich jedoch als schwierig. Dennoch kann dieser Bereich unter Verwendung des Graphen der Funktion  $k_P = k_P(\omega)$  geschätzt werden: der Frequenzbereich sollte alle singulären Frequenzen umfassen, die nach Satz 4 (siehe später) den Extrema des stabilen  $k_P$ -Intervalls entsprechen. Eine weitere hilfreiche Faustregel ist, den Bereich zu finden und wegzulassen, in dem  $k_P(\omega)$  mit einer beinahe konstanten Periode schwingt (siehe Bild 3), d. h.  $\phi(\omega) \rightarrow \pm\pi/2$ , oder  $\pm\pi$ , oder 0.

### 5.3 Stabile $k_P$ -Intervalle

In diesem Abschnitt wird die Lösung des  $k_P$ -Problems aus Abschnitt 4 um die Klasse der Totzeitsysteme erweitert.

**Satz 4** *Man betrachte das Quasipolynom (28). Es gelte die Annahme, dass  $A(s)$   $P$  rechtsseitige Nullstellen,  $J$  von*



**Bild 9:** Menge aller stabilisierenden PID-Regler, Beispiel 5.

Null verschiedene Nullstellen auf der imaginären Achse, und eine  $J_0$ -fache Nullstelle bei  $s = 0$  besitzt. Falls ein  $k_P = k'_P$  existiert, für das (28) Hurwitz-stabil ist, dann existiert auch ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass für  $r \geq k$ , mit  $r \in \mathbb{N}$ , sich für die Anzahl der singulären Frequenzen im Intervall  $0 < \omega < (2r\pi + \delta)/L$  für  $k_P = k'_P$

$$Z \geq \frac{E(4r + N - M + 2P + J - 1) + E(J_0)}{2} \quad (44)$$

ergibt, wobei  $\delta$  so gewählt wird, dass der Hauptterm für  $\omega = (\pm 2r\pi + \delta)/L$  nicht verschwindet.

Der Beweis dieses Theorems ist in [4; 5] zu finden.

**Beispiel 5:** Die Regelstrecke

$$g(s) = \frac{-s^4 - 7s^3 - 2s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s^2+s+1)} e^{-0,05s}, \quad (45)$$

soll mit einem PID-Regler stabilisiert werden. Damit ergeben sich die Variablen zur Bestimmung der Rasterintervalle zu  $N = 7$ ,  $M = 4$ ,  $P = 1$  und  $J = J_0 = 0$ . Gemäß Satz 4 ist eine notwendige Stabilitätsbedingung, ein genügend großes  $k$  zu finden, so dass in jedem Intervall  $0 < \omega < 40r\pi + \delta$ , mit  $r \geq k$  mindestens  $E(4r + 6)/2 = 2r + 3$  singuläre Frequenzen existieren. Es kann einfach überprüft werden, dass diese Bedingung bereits für  $k = 1$  und  $\delta = \pi$  innerhalb  $-24 < k_P < 6,0693$  erfüllt ist.

Bild 9 zeigt die Menge aller stabilisierenden PID-Regler für die Regelstrecke (45). Dieses Beispiel veranschaulicht zwei interessante Situationen: erstens, für  $-3,7671 < k_P < 4,6807$  besteht der stabile Bereich aus zwei separaten Polygonen und zweitens, eines der Polygone schließt in einer Spitze.

## 6 Schlussfolgerungen

Dieser Artikel befasst sich mit der Problemstellung, die Menge aller stabilisierenden PID-Regler für ein gegebenes SISO-System mit eventueller Totzeit zu berechnen.

Die Entwurfsmethode basiert auf singulären Frequenzen, die sich für ein festes  $k_P$  als Geraden in der  $(k_I, k_D)$ -Ebene abbilden. Daher kann diese Methode in zwei Schritte aufgeteilt werden: erstens in die Suche nach stabilen  $k_P$ -Intervallen und zweitens in die Bestimmung der stabilen Polygone in der  $(k_I, k_D)$ -Ebene. Das gesamte nicht-konvexe stabile Gebiet im  $(k_P, k_I, k_D)$ -Parameterraum ergibt sich letztendlich durch Aneinanderreihen der konvexen polygonalen Schnitte.

## Literatur

- [1] BAJCINCA, N.: *The method of singular frequencies for robust design in an affine parameter space*. Proc. 9th Mediterranean Conference on Control and Automation, Dubrovnik, 2001.
- [2] ACKERMANN, J.; KAESBAUER, D.: *Design of robust PID controllers*. Proc. European Control Conference, Porto, 2001.
- [3] HULIN, T.: *Software-Werkzeug zur Auslegung von robusten PID-Reglern*. München, TU München, Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik, Diplomarbeit, 2003.
- [4] BAJCINCA, N.: *Computation of stable regions in PID parameter space for time-delay systems*. IFAC Workshop on TDS, Leuven, 2004.
- [5] BAJCINCA, N.: *Robust control methods with applications to steer-by-wire systems*. Doktorarbeit, TU Berlin, 2005.
- [6] HOHENBICHLER, N.; ACKERMANN, J.: *Computing stable regions in parameter spaces for a class of quasipolynomials*. IFAC Workshop on TDS, Rocquencourt, 2003.
- [7] PONTRYAGIN, L.S.: *On the Zeros of Some Elementary Transcendental Functions*. American Mathematical Society Translations, S. 95–110, 1955.
- [8] BAJCINCA, N.: *Design of robust PID controllers using decoupling at singular frequencies*. sub. in Automatica, 2004.
- [9] SILVA G.J.; DATTA, A.; BHATTACHARYYA, S.P.: *New results on the synthesis of PID controllers*. IEEE Trans. on Automatic Control, S. 241–252, 2002.
- [10] SOYLEMEZ, M.T.; MUNRO, N.; BAKI, H.: *Fast calculation of stabilizing PID controllers*. Automatica 39, S. 121–126, 2003.
- [11] HO, M.T.; DATTA, A.; BHATTACHARYYA, S.P.: *Structure and synthesis of PID controllers*. Springer, London, 2000.

Manuskripteingang: 29. September 2004.



**Naim Bajcinca** ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Robotik und Mechatronik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR). Hauptarbeitsgebiet: Entwicklung von Methoden der robusten Regelungstechnik und deren Anwendung auf Fahrzeug-, Haptik- und Telepräsenzsysteme.  
Adresse: Münchner Str. 20, 82234 Weßling, Tel.: +49-(0)8153-28-2453,  
E-Mail: Naim.Bajcinca@dlr.de



**Thomas Hulin** ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Robotik und Mechatronik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR). Hauptarbeitsgebiet: Konzeption von Force-Feedback Algorithmen für den Einsatz in der virtuellen Produktentwicklung.  
Adresse: Münchner Str. 20, 82234 Weßling, Tel.: +49-(0)8153-28-1306,  
E-Mail: Thomas.Hulin@dlr.de