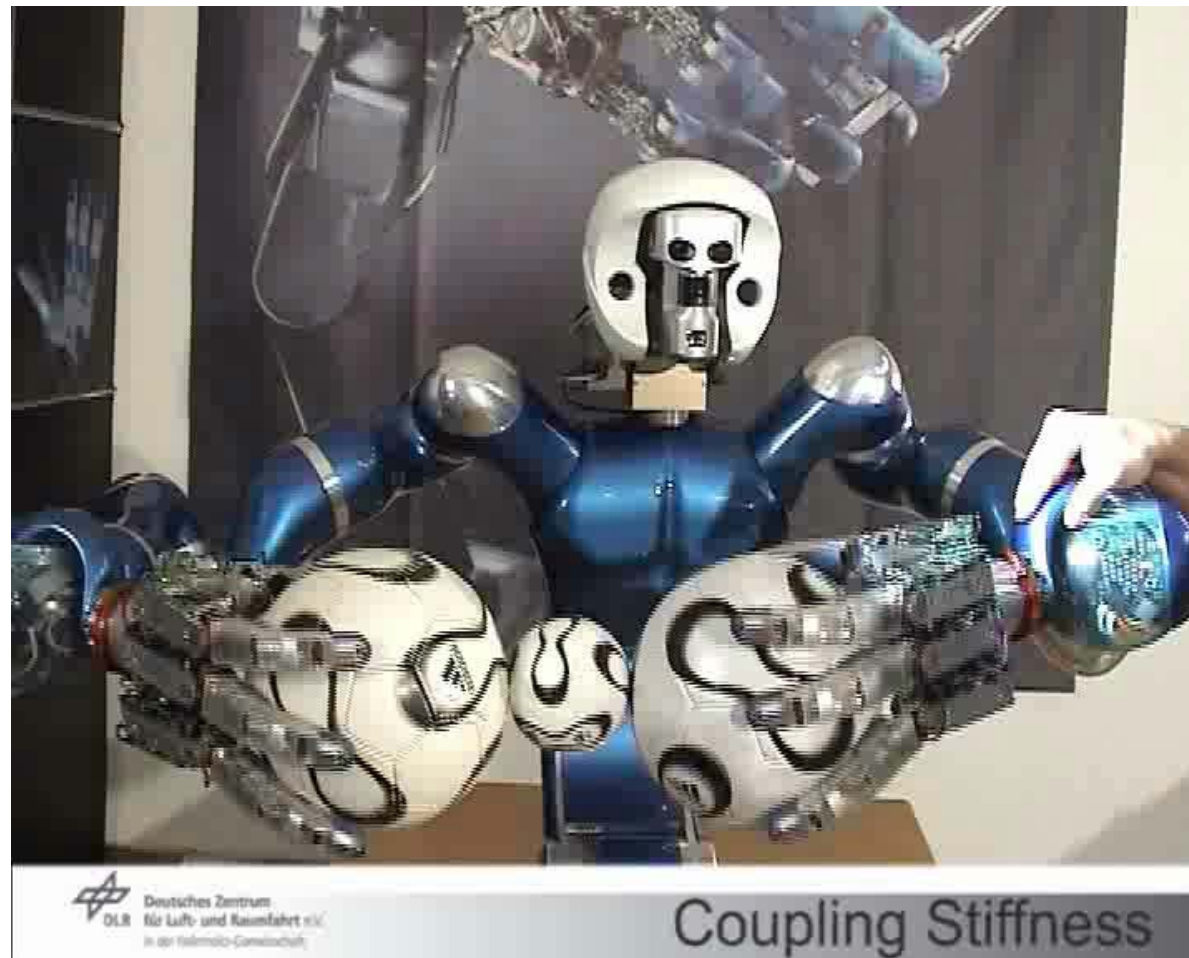

Regelung/Steuerung komplexer kinematischer Ketten

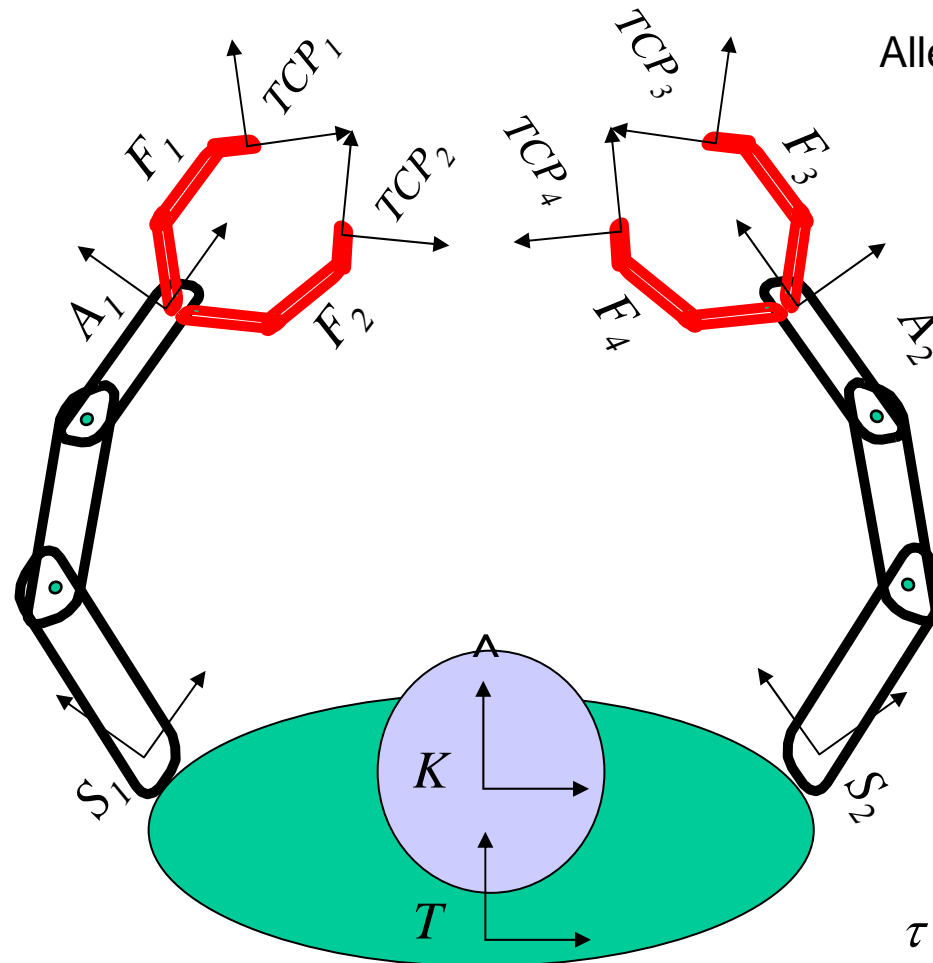
Beispiel: komplexe kinematische Kette

- Baumstrukturen
- geschlossene kinematische Schleifen

Bisher in der Vorlesung: nur serielle Roboter



Baumstrukturen



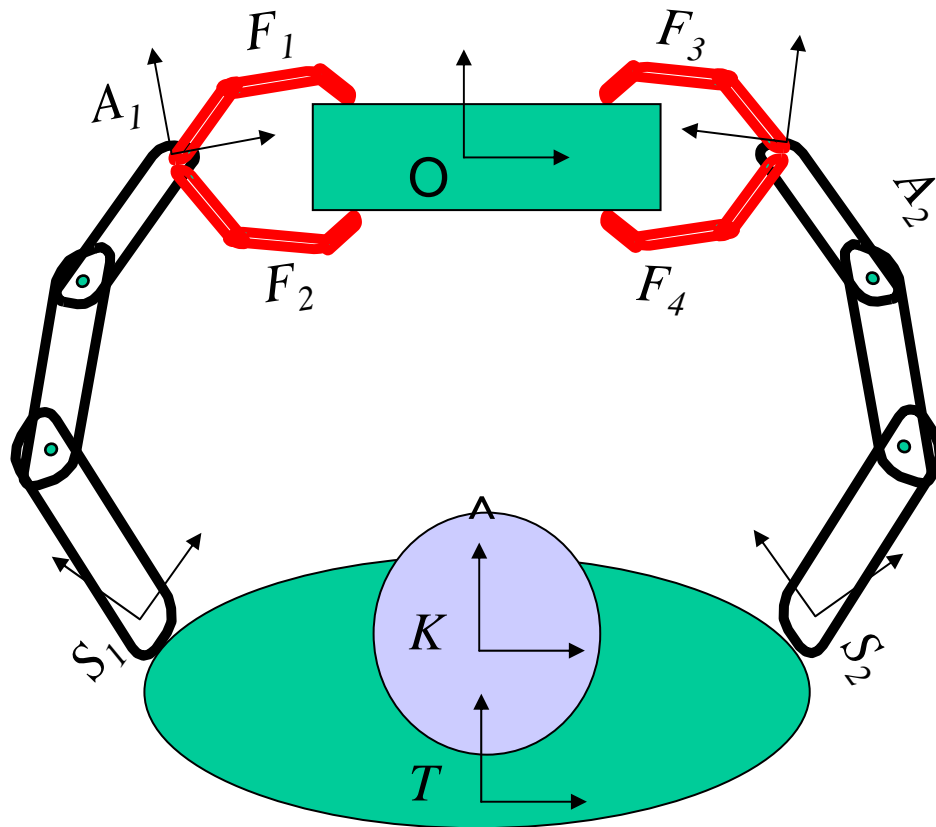
Allen Achsen könne unabhängig voneinander Sollwerte vorgegeben werden.

$$q = \begin{bmatrix} q_{A1} \\ q_{A1} \\ q_{F1} \\ \vdots \\ q_{F4} \end{bmatrix}$$

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)$$

Kinematik und Dynamik kann im Grunde genauso wie für einen seriellen Manipulator durchgeführt werden. (z.B. Euler-Lagrange oder Newton-Euler Formalismus für Dynamik)

geschlossene Schleifen



Die Schleife führt
Zwangsbedingungen
zwischen den Achsen ein.

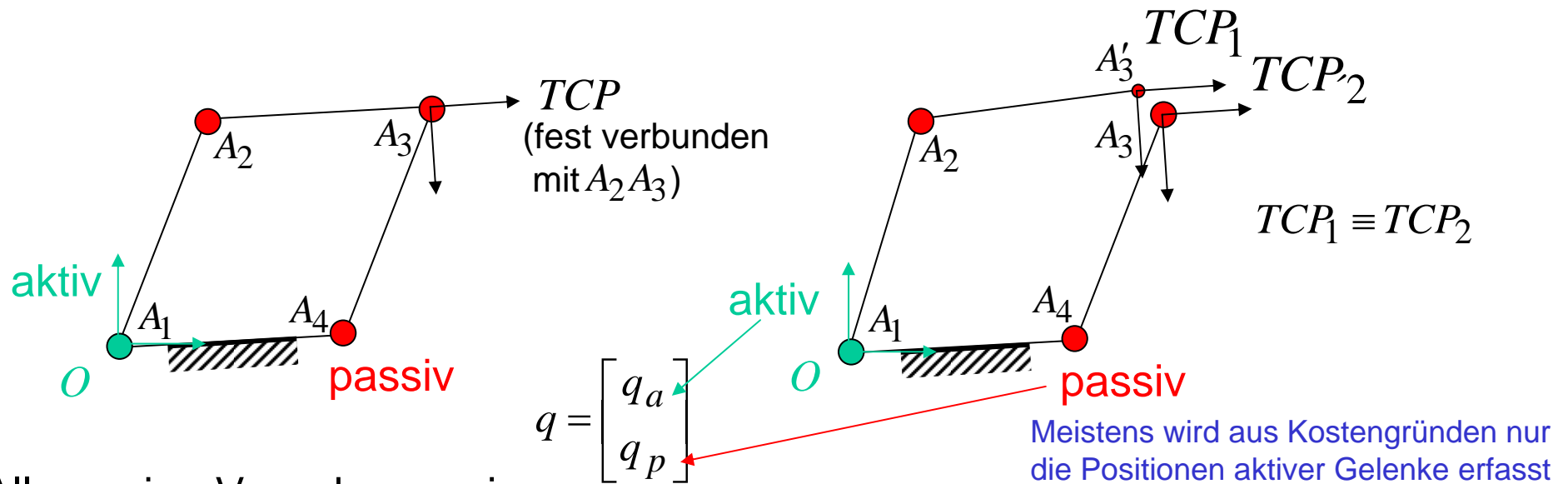
Notwendigkeit von passiven Gelenken,
um die in der Schleife bei
Ungenauigkeiten auftretenden
Kräfte zu minimieren.

$$q = \begin{bmatrix} q_a \\ q_p \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{aktive Gelenke} \\ \leftarrow \text{passive Gelenke} \end{array}$$

Annahmen: - Punktkontakt
 - Kontaktpunkt Finger – Objekt ändert sich nicht.

Unter diesen Annahmen kann man diesen **Kontakt als virtuelles passives Gelenk** betrachten.

Direkte Kinematik geschlossener Schleifen



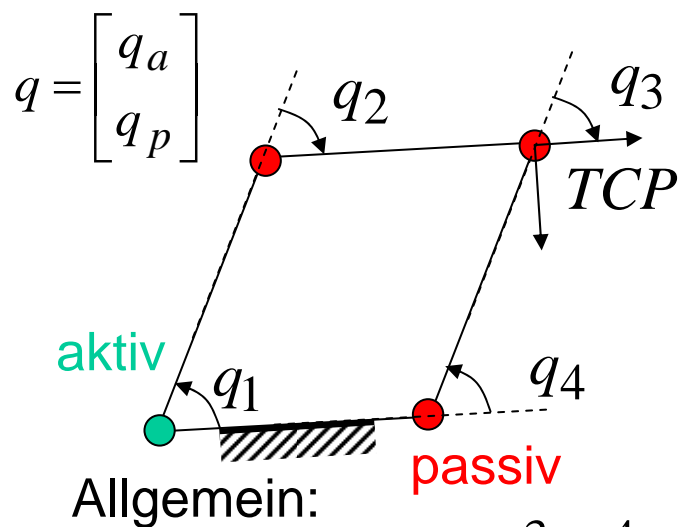
Allgemeine Vorgehensweise:

- Auftrennung der kinematischen Kette an einem passiven Gelenk
=> Baumstruktur
- Aufstellung des geometrischen Modells für die Baumstruktur ${}^O T_{TCP_1}(q_a, q_p)$, ${}^O T_{TCP_2}(q_a, q_p)$
- Aus der Schleifenbedingung (**Zwangsbedingungen**) ${}^O T_{TCP_1}(q_a, q_p) = {}^O T_{TCP_2}(q_a, q_p)$ werden die passiven Gelenke q_p ausgedrückt.
- Berechnung der TCP-Position durch einsetzen $TCP_1(q_a, q_p(q_a)) \cdot TCP_2(q_a, q_p(q_a))$ oder

Bemerkung: Rückwärtskinematik (gegeben TCP, bestimme q) wird wie bekannt für die beiden seriellen Manipulatoren des aufgetrennten Systems bestimmt.

Es ist im Allgemeinen wesentlich einfacher, da die beiden seriellen Manipulatoren einfach sind.

Beispiel: Parallelogramm



$${}^3T_4 {}^4T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 = I$$

Daraus folgen drei Gleichungen: **Zwangsbedingungen.** bzgl. 2 Translationen und einer Rotation in der Ebene

$$\Phi(q) = 0, \quad \Phi \in \mathbb{R}^3$$

In dem einfachen Fall des Parallelogramms ist die Lösung direkt ablesbar:

$$q_4 = q_1$$

$$q_2 = -q_1$$

$$q_3 = -q_1$$

4 Achsen

3 Zwangsbedingungen

=> **Der Roboter hat 1DoF am TCP**

=> In der Tat darf nicht mehr als ein Gelenk aktiv positioniert werden.

Anzahl der Freiheitsgrade einer Schleife

Für einen seriellen Roboter:

$$q \in \mathbb{R}^n \quad n \text{ Links, } n \text{ 1dof Gelenke}$$

$$\Phi(q) = 0, \quad \Phi \in \mathbb{R}^k \quad \text{Zwangsbedingungen}$$

für n Gelenke, k Zwangsbedingungen $\Rightarrow n-k$ Freiheitsgrade am TCP

Im Allgemeinen, für eine beliebige Struktur (mit Schleifen) mit N Links, n Gelenke, k Freiheitsgrade/Gelenk

- planarer Fall: 3 Freiheitsgrade/Link, 3- k Zwangsbedingungen/Gelenk

$$DoF = 3(N - n) + \sum_{i=1}^n k_i$$

- räumlicher Fall: 6 Freiheitsgrade/Link, 6- k Zwangsbedingungen/Gelenk

$$DoF = 6(N - n) + \sum_{i=1}^n k_i$$

bekannt als

Formel von Grübler

Beispiele an der Tafel

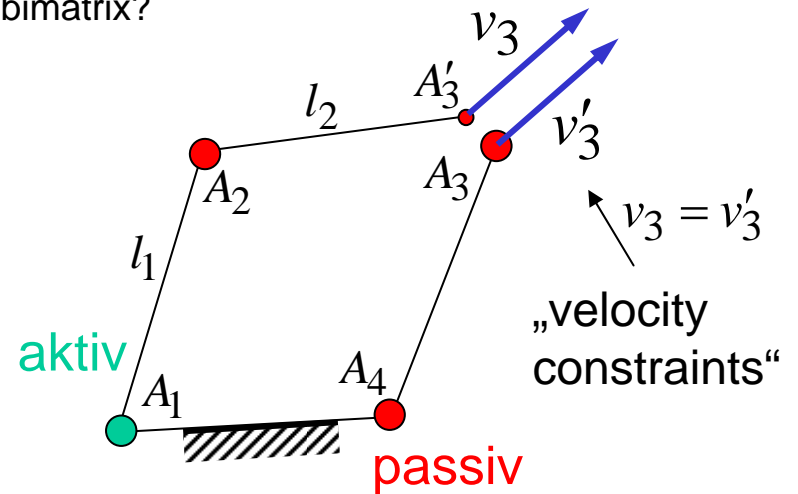
gilt nur für unabhängige Zwangsbedingungen

Differentielles kinematisches Modell

Wie berechne ich die Jakobimatrix?

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_p \end{bmatrix}$$

Durch Gleichsetzen der kartesischen Geschwindigkeiten an dem aufgetrennten Gelenk, werden die differentiellen Zwangsbedingungen erhalten.



$$v_3 = v_3' \Rightarrow J_3(q_1, q_2) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = J_{3'}(q_3, q_4) \begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

zusammengefasst:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} J_3(q_1, q_2), & -J_{3'}(q_3, q_4) \end{bmatrix}}_{J_{c0}(q_1, q_2, q_3, q_4)} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = 0$$

mit Einsetzen der Zwangsbedingungen:

$$\boxed{J_c(q_1) \dot{q} = 0}$$

differentielle Zwangsbedingung

Differentielles kinematisches Modell

Ein anderer Weg diese Gleichung herzuleiten ist die Ableitung der Zwangsbedingung

$$\dot{\Phi}(q_a, q_p) = 0$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi(q_a, q_p)}{\partial q_a} & \frac{\partial \Phi(q_a, q_p)}{\partial q_p} \end{bmatrix}}_{J_{c0}} \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_p \end{bmatrix} = 0$$

$$J_c(q_a) \dot{q} = 0$$

differentielle Zwangsbedingung

ausgeschrieben:

$$\begin{bmatrix} J_{ca}(q_a) & J_{cp}(q_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_a \\ \dot{q}_p \end{bmatrix} = 0$$

da $J_{cp}(q_a)$ quadratisch (Anzahl der Zwangsbedingungen = Anzahl der passiven Gelenke) $\dot{q}_p = J_{cp}^{-1}(q_a) J_{ca}(q_a) \dot{q}_a$ (wenn $J_{cp}(q_a)$ nicht singulär)

Damit kann für die aufgeschnittene Baumstruktur klassisch die kartesische Geschwindigkeit errechnet werden.

Z.B. für das Parallelogramm:

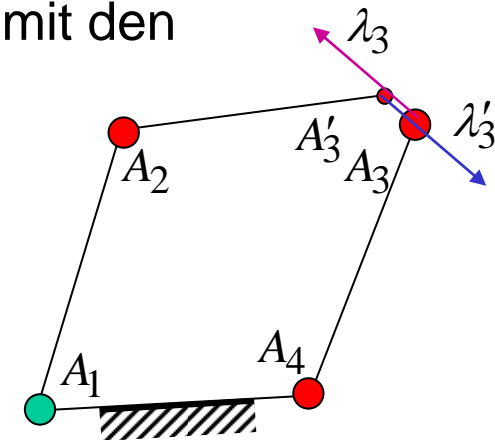
$$v_3 = \begin{bmatrix} J_{3_1} & J_{3_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ -\dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{3_1} - J_{3_2} \end{bmatrix} \dot{q}_1$$

Dynamik geschlossener Schleifen

Dynamik der aufgetrennten Schleife (Baumstruktur), mit den zusätzlichen Vereinbarungen:

- Alle Achsen sind aktuiert.
- Die Baumstruktur führt aufgrund dieser Momente genau die gleiche Bewegung q, \dot{q}, \ddot{q} wie die geschlossene Schleife aus.

$$\tau_B = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) \quad \tau_B = \begin{bmatrix} \tau_{Ba} \\ \tau_{Bp} \end{bmatrix}$$



In Wirklichkeit haben wir $\tau = \begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix}$ und die Schleife wird durch die zusätzlichen Zwangskräfte λ an der virtuellen Trennstelle zusammengehalten.

Die Kräfte λ sind dual zu den Zwangsgeschwindigkeiten v an der Trennstelle, d.h.

$$v = \frac{\partial \Phi(q)}{\partial q} \dot{q} \Rightarrow \tau_\lambda = \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial q} \right)^T \lambda$$

Da sich der reale und der virtuell aufgetrennte Roboter gleich bewegen, muss gelten:

$$\tau_B(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \tau - \tau_\lambda \quad \Rightarrow$$

$$\tau = \tau_B(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_\lambda$$

Dynamik geschlossener Schleifen

Bemerkung: In der klassischen Mechanik erreicht man diese Gleichung über die Euler-Lagrange Gleichung mit Nebenbedingungen:

$$\tau = \frac{d}{dt} \left(\frac{dL(q, \dot{q})}{d\dot{q}} \right) - \frac{dL(q, \dot{q})}{dq} + \left(\frac{\partial \Phi(q)}{\partial q} \right)^T \lambda \quad \text{mit} \quad L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$$

$$\tau = \tau_B(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \tau_\lambda$$



$$\begin{bmatrix} \tau_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{Ba} \\ \tau_{Bp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{ca}^T \\ J_{cp}^T \end{bmatrix} \lambda$$

aus der zweiten Gleichung:

$$\lambda = -J_{cp}^{-T} \tau_{Bp}$$

$$\tau_a = \tau_{Ba} - J_{ca}^T J_{cp}^{-T} \tau_{Bp}$$

oder einfach $\tau_a = J_B^T \tau_B$ mit $J_B^T = \begin{bmatrix} I, & -J_{ca}^T J_{cp}^{-T} \end{bmatrix}$

Die Dynamik der geschlossenen Schleife lässt sich aus der Dynamik der Baumstruktur + Nebenbedingungen errechnen.