
Passivitätsbasierte Kartesische Regelung

Allgemeine Betrachtungen

Für einen nichtredundanten, nicht singulären Roboter können alle auf Gelenkebene besprochenen Regler auch in kartesischen Koordinaten angewandt werden.

Robotermodell in $SE3$ Koordinaten x :

$$M_K(q)\ddot{x} + C_K(q, \dot{q})\dot{x} + g_K(q) = F$$

z.B. PD-Regler mit Schwerkraftkompensation (Lageregler)

$$F = -k_P(x - x_d) - k_D\dot{x}$$

$$\tau = J^T(q)F + g(q)$$

geschlossene Reglerschleife:

$$M_K(q)\ddot{x} + C_K(q, \dot{q})\dot{x} + k_D\dot{x} + k_P(x - x_d) = 0$$

I.a.s. – basierend auf dem LaSalle Theorem

Unterschiede zum Gelenkregler

- Alle Aussagen sind nur **lokal**, nicht global gültig!

Warum?

- In kartesischen Koordinaten ist es nicht möglich, ein stetiges Potential mit einem einzigen globalen Minimum zu definieren

Dies gilt unabhängig von der gegebenen Roboterkinematik, es ist eine Eigenschaft von $SE3$ ($SO3$)

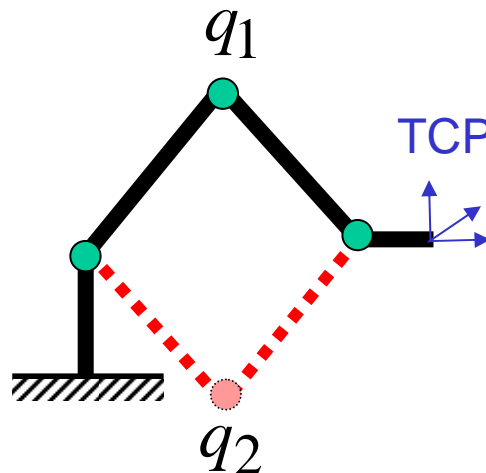
- Im Falle von redundanten Robotern bedeutet die Konvergenz in den Koordinaten x keine asymptotische Stabilität des Systems (Nullraumverhalten)

Lokale Gültigkeit der Kartesischen Regelung

Grund 1 (Roboterbedingt)

Die Vorwärtskinematik $f : Q \rightarrow SE3$ ist nur lokal bijektiv, global aber nicht.

Beispiel:
(GIR)



$$x = x_d$$

$$q \in \{q_1, q_2\}$$

Bei verschiedenen Ausgangskonfigurationen kann der Roboter zu verschiedenen Gelenkkonfigurationen konvergieren, während er die kartesische Konfiguration x_d erreicht.

Bemerkung: Im Allgemeinen kann eine Umkonfiguration $q_1 \rightarrow q_2$ stattfinden, ohne eine Singularität durchfahren zu müssen („cuspidal manipulators“)! Allerdings ist dies meistens für Roboter mit allen Achsen parallel oder senkrecht (also fast allen praktisch realisierten Robotern) nicht der Fall.

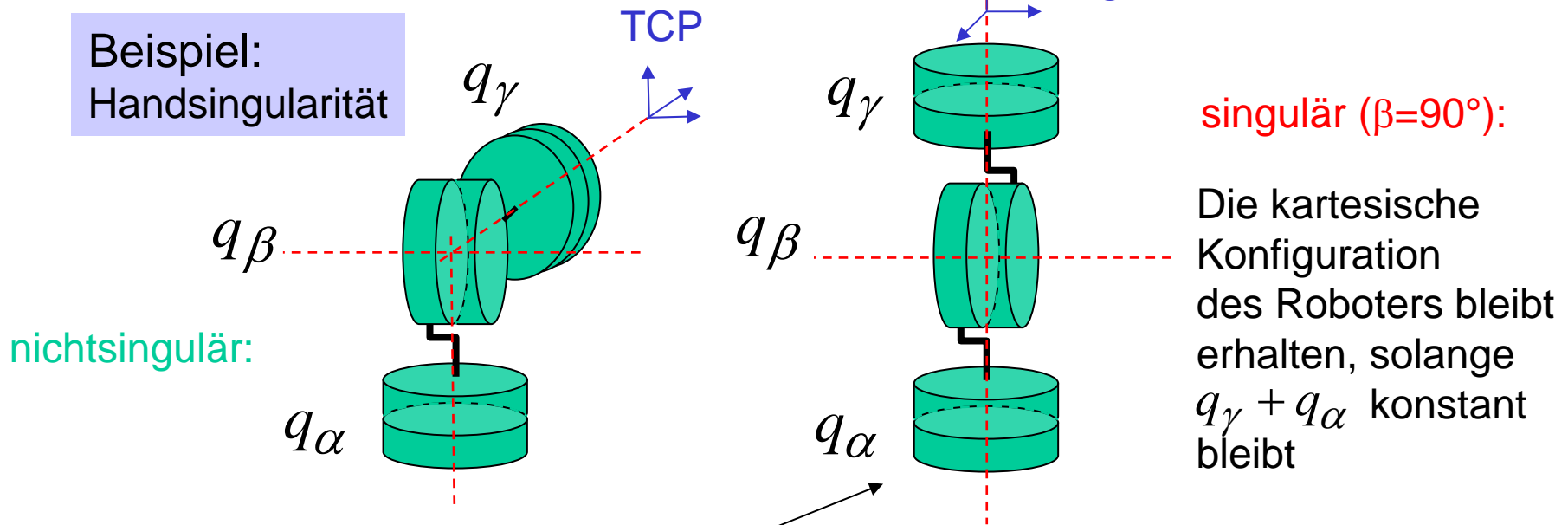
Manipulatorsingularitäten

Grund 2 (Roboter & SE3)

(Warum kann kartesische Regelung immer nur lokal sein?)

Die Mannigfaltigkeiten $SO(3)$ ($SE(3)$) können nur lokal, nicht global durch 3 (6) Parameter beschrieben werden.

⇒ Es gibt keinen 6-achsigen Manipulator, der eine eindeutige Repräsentierung einer beliebigen TCP-Konfiguration ermöglichen kann.



Obzwar der kartesische Fehler konvergiert, gibt es keine eindeutige Ruhelage des Roboters

Singularitäten „reloaded“

(Wie verhält sich eine Regelung auf Geschwindigkeitsschnittstelle/Kraftschnittstelle in Singularitäten)

Geschwindigkeitsschnittstelle: (siehe GIR)

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{x}$$

⇒ in der Nähe der Singularitäten wachsen die Gelenkgeschwindigkeiten unbegrenzt

„Roboter unruhig“

$$\dot{q} = (J^T(q)J(q) + \lambda^2 I)^{-1} J^T(q)\dot{x} \Rightarrow \text{Begrenzung der Geschwindigkeit}$$

⇒ Bahnfehler

Drehmomentschnittstelle:

$$\tau = J^T(q)F$$

⇒ eine Kraft in singulärer Richtung erzeugt kein Drehmoment in den Gelenken

„Roboter unempfindlich“

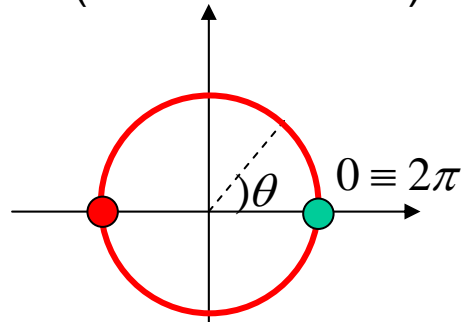
⇒ Bahnfehler

Stetiges Kartesisches Potential

(Kann man die Vorstellung einer translatorischen Feder mit einer Ruhelage auf SO3 übertragen?)

Grund 3 (SO3)

Problembeschreibung
(eindimensional)



stetiges Federmoment:

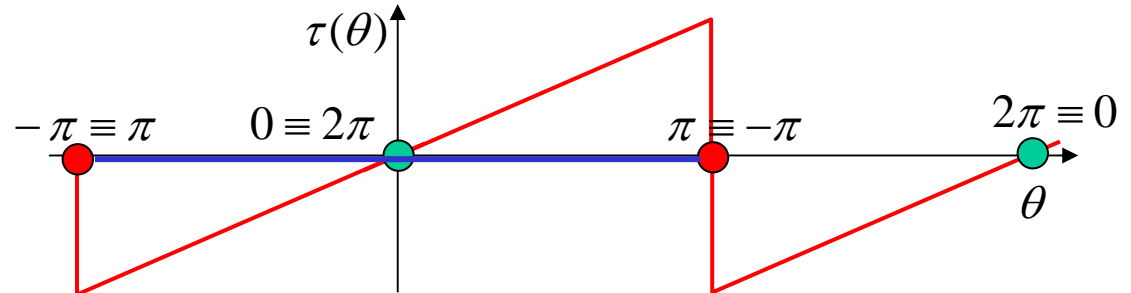
$$f = k_0 \sin(\theta)$$

$$k = \frac{\partial f}{\partial \theta} = k_0 \cos(\theta)$$

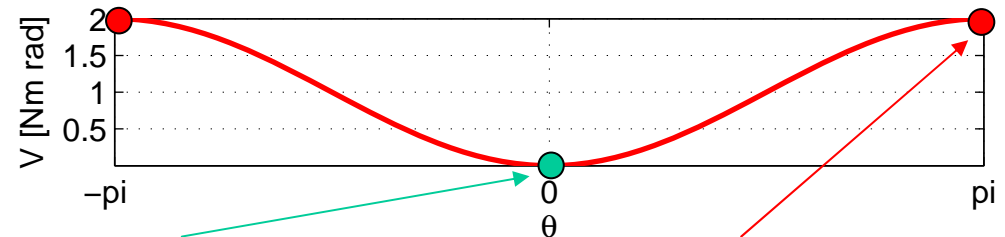
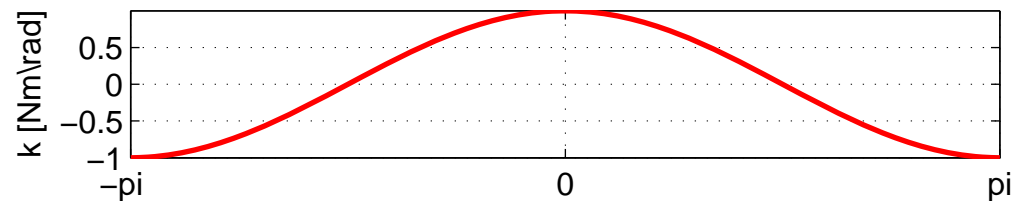
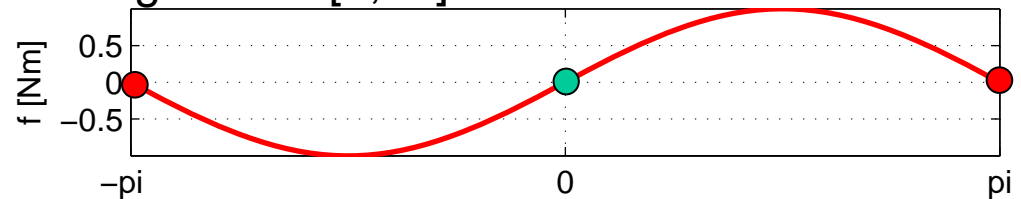
$$V = \int_0^\theta f(x) dx = k_0 (1 - \cos(\theta)) = 2k_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (V(0) = 0)$$

Eine stetiges Federmoment muss mindestens zwei Gleichgewichtspunkte haben

„lineares Federmoment“



Eine linear ansteigendes Federmoment muss eine Unstetigkeit auf $[0, 2\pi]$ aufweisen



stabiles Gleichgewicht ($k > 0$) instabiles Gleichgewicht ($k < 0$)

Stetiges Potential für SO3

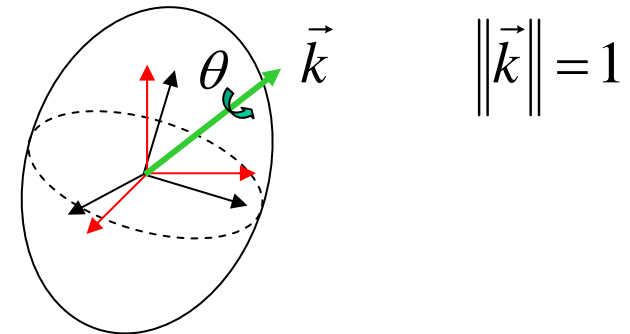
(Kann man die Vorstellung einer translatorischen Feder mit einer Ruhelage auf SO3 übertragen?)

Grund 3 (SO3)

Man kann differentialgeometrisch beweisen, dass in SO3 für ein stetiges Potential mindestens 4 Gleichgewichtspunkte existieren (1 stabiles , Nulllage, 3 instabile – Rotationen um π um jeweils eine Achse)

Implementierung z.B. mit Quaternionen

$$\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = \left[\underbrace{\cos \frac{\theta}{2}}_{\text{Skalarteil}}, \underbrace{\vec{k} \sin \frac{\theta}{2}}_{\text{Vektorteil}} \right]$$



Man nimmt ε als lokale Koordinate für SO3

$$\text{Potential: } V_\varepsilon = 2\varepsilon^T K_o \varepsilon = 2k^T K_o k \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Moment: } F_\omega = J_{\varepsilon\omega}^T \underbrace{\left(-\frac{\partial V_\varepsilon(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^T}_{F_\varepsilon} = J_{\varepsilon\omega}^T F_\varepsilon$$

Gelenkmoment:

$$\tau = J^T(q) \begin{bmatrix} F_v \\ F_\omega \end{bmatrix}$$

Die Jacobimatrix
definiert durch: $\dot{\varepsilon} = J_{\varepsilon\omega} \omega$

Anwendung von Potentialen

Eine recht allgemeine Herangehensweise um Reglerkräfte im Rahmen des Passivitätsformalismus für einen Roboter zu erzeugen ist:

1. Man definiert lokale Koordinaten p , in denen das Reglerziel beschreiben wird

$$p = h(q)$$

2. Man definiert ein (z.B. quadratisches) Potential in p :

$$U(p) = \frac{1}{2} p^T K_p p$$

3. Man leitet das Potential ab, um Kräfte zu erhalten, die dual zu \dot{p} sind

$$F_p^T = -\frac{\partial U_p(p)}{\partial p} \quad \Rightarrow \quad F_p = -K_p p$$

4. Man wendet die Kettenregel an, um „elastische“ Gelenkmomente zu erhalten

$$\tau^T = -\underbrace{\frac{\partial U_p(p)}{\partial p}}_{F_p^T} \underbrace{\frac{\partial p(q)}{\partial q}}_{J_{pq}} \quad \Rightarrow \quad \tau = J_{pq}^T F_p$$

Koordinatentransformation
für den Kovektor

Anwendung von Potentialen

5. Man fügt einen dissipativen Term hinzu

$$F_{\dot{p}} = -D_p \dot{p} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\dot{p}} = J_{pq}^T F_{\dot{p}} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\dot{p}} = -J_{pq}^T D_p J_{pq} \dot{q}$$

$$\dot{p} = J_{pq} \dot{q}$$

Koordinatentransformation für den Vektor

Koordinatentransformation
für den Dämpfungstensor

Man erhält somit einen zusätzlichen PD-Regler in den Koordinate p

$$F = F_p + F_{\dot{p}} = -K_p p - D_p \dot{p}$$

Das Subsystem ist passiv bezüglich des Ein- Ausgangspaares $\{-\dot{p}, F\}$

In der Stabilitätsanalyse wird einfach das Potential $U(p)$ zur Lyapunov-Funktion hinzugefügt

Die Ableitung der Lyapunov-Funktion enthält den zusätzlichen Term

$$\dot{V}_{\dot{p}} = -\dot{p}^T D_p \dot{p}$$

Anwendung von Potentialen

Bemerkungen:

- Für $p = x - x_d$ erhält man die kartesische Regelung
- Für Dämpfungsentwurf können die gleichen Methoden wie im Gelenkraum benutzt werden (Video)
- Weitere Anwendungen
 - Kollisionsvermeidung, Vermeidung von Gelenk-Endanschlägen
 - Singularitätsvermeidung
 - Nullraumsteifigkeit ...
- Die Benutzung von Potentialen in günstigen Koordinaten ist viel effizienter als das direkte Aufstellen von Kräften die an bestimmten Punkten des Manipulators wirken.

Im ersten Fall: $U \xrightarrow{\text{Differentiation}} F$

Im zweiten Fall: $F \xrightarrow{\text{Integration}} U$

Differentiation ist immer einfacher als Integration! Im letzten Fall muss sichergestellt werden, dass das Kraftfeld wirklich integrierbar ist.

Anwendung von Potentialen

Bemerkungen:

- Steifigkeit um Ruhelage:

Potential - kovarianter Tensor 0-ter Ordnung

$$U_p(p) = \frac{1}{2} p^T K_p p$$

↑
konstant

$$U_q(q) = \frac{1}{2} p(q)^T K_p p(q)$$

Kraft - kovarianter Tensor 1-ter Ordnung

$$F_p^T = -\frac{\partial U_p(p)}{\partial p} \Rightarrow F_p = -K_p p \quad F_q^T = -\frac{\partial U_q(p(q))}{\partial p} \frac{\partial p(q)}{\partial q} \Rightarrow F_q(q) = -J_{pq}^T(q) K_p p(q)$$

Steifigkeit - kovarianter Tensor 2-ter Ordnung

$$K = -\frac{\partial F_p(p)}{\partial p} \Rightarrow K = K_p \quad K = -\frac{\partial F_q(q)}{\partial q} \Rightarrow K = J_{pq}^T(q) K_p \frac{\partial p(q)}{\partial q} \leftarrow \text{g\u00fcltig nur um Ruhelage } p=0, \text{ sonst muss } J_{pq} \text{ auch abgeleitet werden}$$

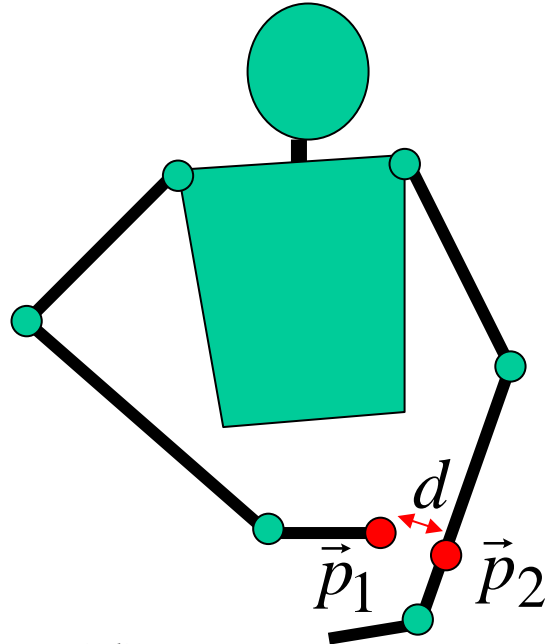
$$K = J_{pq}^T(q) K_p J_{pq}(q)$$

Tafel: Interpretation Kraftfeld

Die Koordinatentransformation kann bei kovarianten Tensoren auf Anwendung der Kettenregel reduziert werden („Kovariante Differentiation“)

Kollisionsvermeidung

In diesem Fall ist das Potential ein abstoßendes, nicht ein anziehendes Potential



Potential: $U(d)$

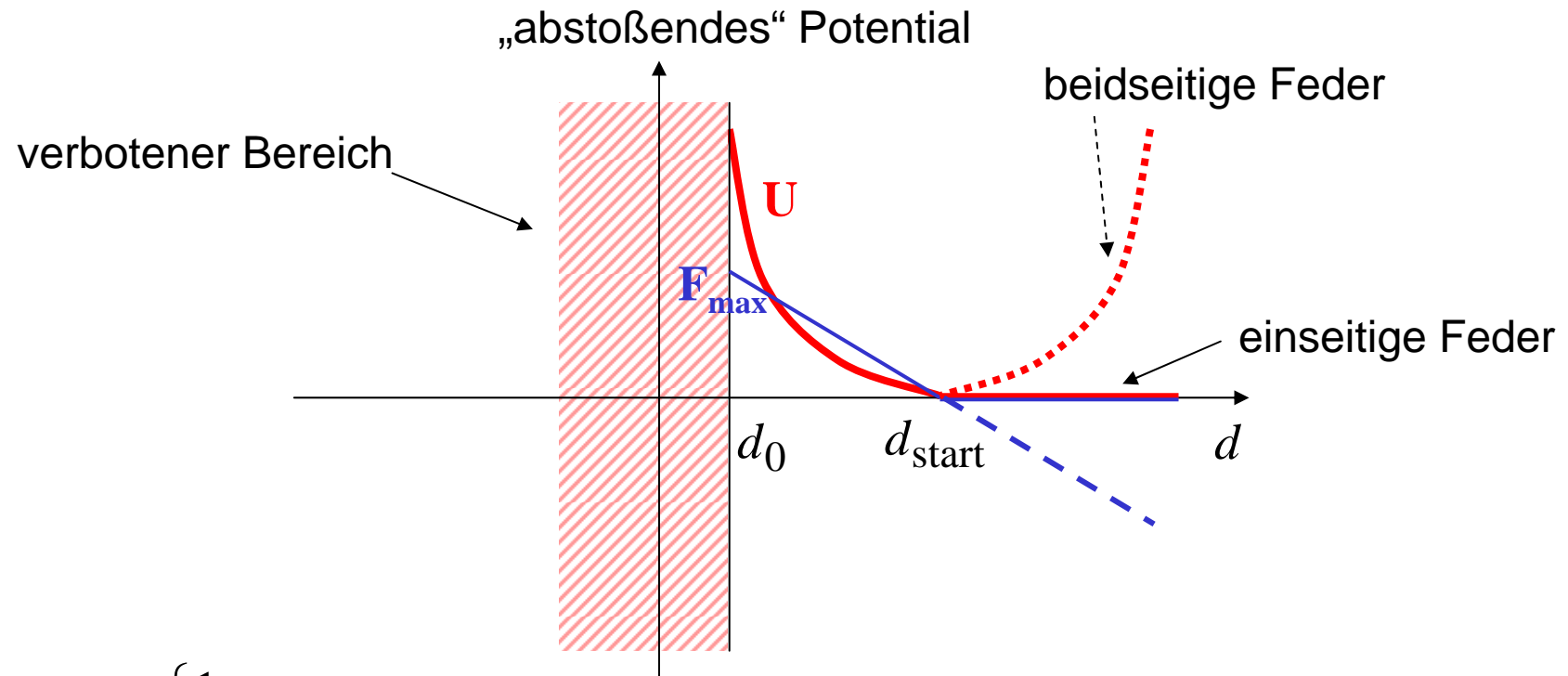


Durch geometrische Kollisionsüberprüfung werden die Punkte p_1, p_2 mit dem kleinsten Abstand d gefunden. p_1, p_2 sind wiederum Funktionen der Gelenkwinkel q

$$\text{Gelenkmomente: } \tau^T = -\frac{dU}{dd} \frac{\partial d}{\partial p_{i=1,2}} \frac{\partial p_{i=1,2}}{\partial q} \Rightarrow \tau = -J_{pq}^T J_{dp}^T \frac{dU}{dd}^T$$

Bemerkung: Die Koordinatentransformation kann bei Kovektoren auf Anwendung der Kettenregel reduziert werden.

Kollisionsvermeidung



$$U(d) = \begin{cases} \frac{1}{2} k_d (d - d_{\text{start}})^2 & d < d_{\text{start}} \\ 0 & d \geq d_{\text{start}} \end{cases}$$

Andere Potentialprofile sind auch möglich (z.B. exponentiell)

Kollisionsvermeidung



The skeleton algorithm for real-time collision avoidance of a humanoid manipulator

Agostino DE SANTIS, Bruno SICILIANO
PRISMA Lab, Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Napoli Federico II
www.prisma.unina.it

Alin ALBU-SCHÄFFER, Christian OTT, Gerd HIRZINGER
Institut für Robotik und Mechatronik, DLR
www.dlr.de/rm/en/

Behandlung von Singularitäten „reloaded“

Man sucht eine Größe d , die als Abstand von der Singularität dienen kann (d.h. $d=0$ in der Singularität, sonst $d>0$)

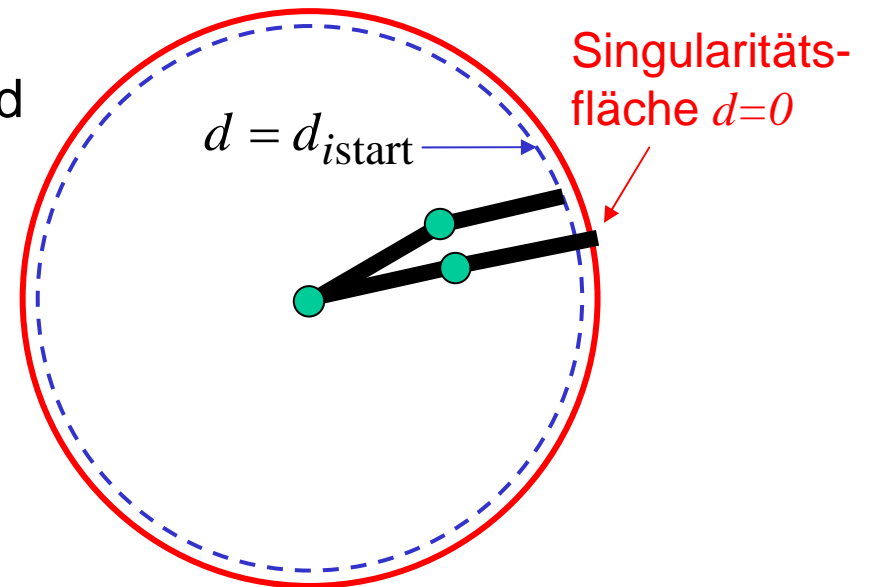
z.B. für redundante Roboter:

$$d(q) = \det(J(q)J^T(q)) = 0$$

$$d(q) = d_1(q) \cdot d_2(q) \cdot \dots \cdot d_i(q)$$

i unterschiedliche Typen von Singularitäten

Man baut ein einseitiges Potential $U(d_i)$ auf und behandelt das Problem genauso wie bei der Kollisionsvermeidung, d.h. man leitet $U(d_i)$ ab und generiert Gelenkdrehmomente



Cartesian Impedance Control:

vertical

stiffness=500 N/m

damping factor 0.001

horizontal

stiffness=500 N/m

damping factor 0.7

Aufsummieren von Potentialen

Die einzelnen Potentiale werden aufsummiert in der Lyapunov-Funktion, genauso wie die Gelenkmomente.

$$V_P = \sum_i U_i \quad \tau_P = \sum_i \tau_i$$

Hauptproblem: **Bei mehreren Potentialen ist die Gleichgewichtslage nicht immer eindeutig, d.h.**

- mehrere Gleichgewichte möglich (lokale Minima)
- u.U gibt es keine Ruhelage, in der alle Fehler minimiert werden – eine Kontrolle der einzelnen Restfehler ist nur indirekt, über die Auslegung der Federsteifigkeiten möglich.

mögliche Lösung: **Priorisierung der Aufgaben** durch Nullraumprojektion

- Erste Aufgabe wird immer gelöst
- Zweite Aufgabe wird nur gelöst, wenn nicht im Konflikt mit der ersten
-

Nullraumsteifigkeiten

Kommandiertes Gelenkmoment aus dem Task Space Control:

$$\tau = J^T(q)F + (I - J^T(q)J^{\#T}(q))\tau_0$$

kartesische Komponente
(primäre Aufgabe)

Nullraum – Komponente
(sekundäre Aufgabe)

Allgemein, gegeben $p_i : m_i$ - dimensionale Koordinate für Aufgabe $i=1,2,3,\dots$

$$\text{Dazu } U_i(p_i), \quad \tau_i = -J_i^T(q) \frac{\partial U_i^T(p_i)}{\partial p_i} \quad \text{mit } J_i(q) = \frac{\partial p_i}{\partial q}$$

Folgendes Gelenkmoment implementiert die Priorisierung:

$$\tau = \tau_1 + (I - J_1^T J_1^{\#T}) \left(\tau_2 + (I - J_2^T J_2^{\#T}) \left(\tau_3 + (I - J_3^T J_3^{\#T}) \dots \right) \right)$$

Bemerkung: Ein Nachteil ist, dass durch die Projektion die Passivität im Allgemeinen verloren geht.