Passivitätsbasierte Regelung
(Energy Shaping)

Motivation

Vorteile des Entkopplungsreglers:

lineare, völlig entkoppelte Dynamik des geregelten Systems
=> Referenzverhalten

offene Fragen:

- Stabilität bei ungenauen Parametern ($M,g,c\ldots$)
- Empfindlichkeit gegenüber unmodellierter Dynamik (z.B. Reibung)
- Da die gleiche lineare, entkoppelte Dynamik unabhängig von der Roboterkonfiguration vorgegeben wird, muss diese so gewählt werden, das für die worst-case Konfiguration keine Stellgrößensättigung eintritt für die erwarteten Störungsamplituden.
  Somit erreicht der Arm aber in weniger kritischen Konfigurationen nicht die best mögliche Performanz.

Passivitätsbasierte Regler liefern im Allgemeinen im Idealfall geringere Performanz, weisen aber die besseren Ergebnisse in Gegenwart von Parameter- und Modellungenauigkeiten (Robustheit)

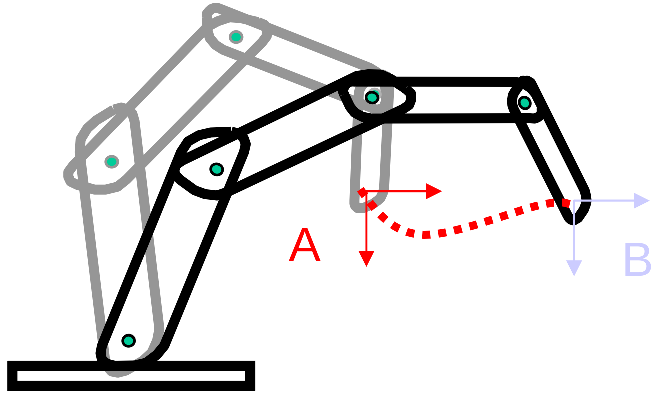
Regelungsziele

(was soll der Regler erreichen können?)

Lageregelung *(Regulation)*:

Konvergenz zu einem Punkt $x_d(t) = x_B$
Unterdrückung von Störungen

$$(x_B - x) \xrightarrow{t \to \infty} 0$$



Bahnregelung *(Tracking)*:

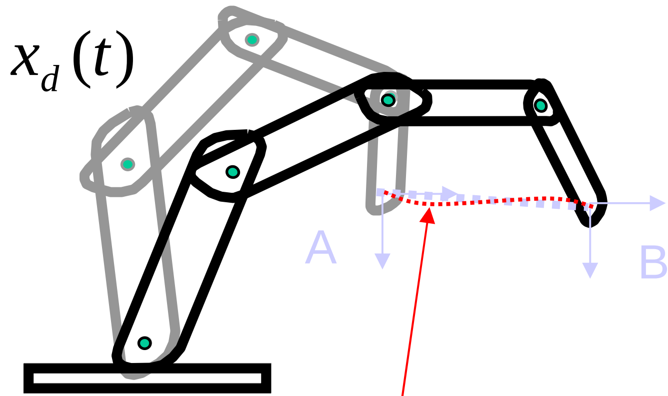
abfahren einer zeitabhängigen Trajektorie

if $x(0) \neq x_d(0)$

$$(x_d(t) - x) \xrightarrow{t \to \infty} 0$$

if $x(0) = x_d(0)$

$$(x_d(t) - x) = 0$$



zu erwartende Performanz
mit einem Lageregler

Regelungsziele

Des weiteren unterscheiden wir in beiden Fällen zwischen (siehe RS2)

- lokale Konvergenz

  - stabil (l.s.)
  - asymptotisch stabil (l.a.s.)
  - exponentiell stabil (l.e.s.)

- globale Konvergenz

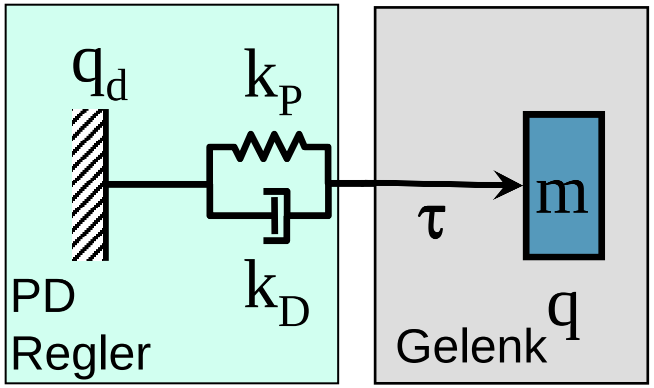
  - stabil (g.s.)
  - asymptotisch stabil (g.a.s.)
  - exponentiell stabil (g.e.s.)

Beispiel: Der Entkopplungsregler ist

- g.e.s. bei genauem Modell
- keine Aussagen sind möglich bei ungenauem Modell

Passivitätsansatz: Lageregelung

Grundidee (1 Gelenk)



$$\tau = k_P(q_d - q) + k_D(\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\dot{q}_d} - \dot{q})$$

Regler kann als passives Feder-Dämpfer Element interpretiert werden, das an einer konstanten Soll-Position befestigt ist

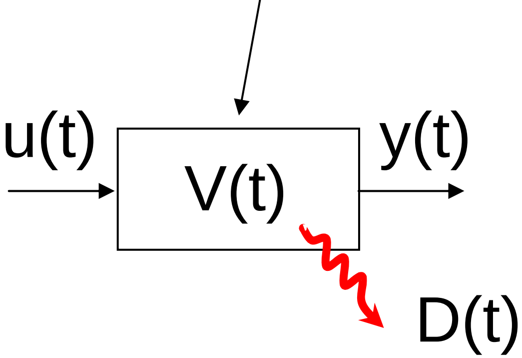
Definition der Passivität

(Wiederholung RS2)

Ein System ist passiv, wenn

$$\exists \alpha > -\infty, \qquad \int_0^t u^T(t) y(t) \mathrm{d}t > \alpha \qquad \forall u(t)$$

alternative (differentielle) Formulierung



Energievariation

Eingangsleistung

dissipierte Leistung

$$\dot{V}(t) = u^T(t) y(t) - D(t)$$

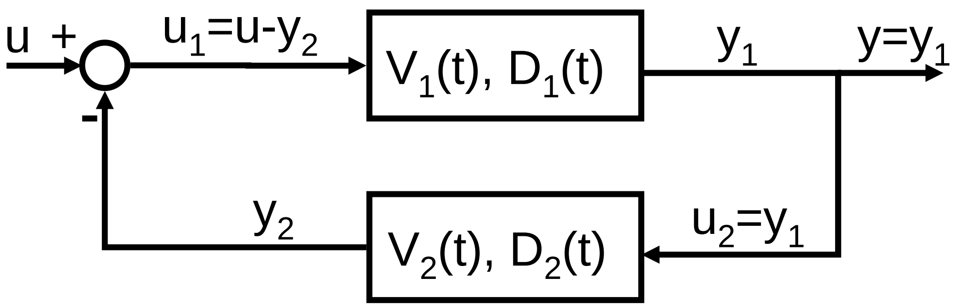
mit $D(t) \geq 0$ und $V(t)$ nach unten begrenzt

Zusammenschaltung passiver Systeme

(Wiederholung RS2)

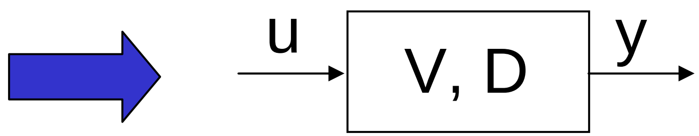
$$\dot{V}(t) = u^T(t)y(t) - D(t)$$

Gegenkopplung

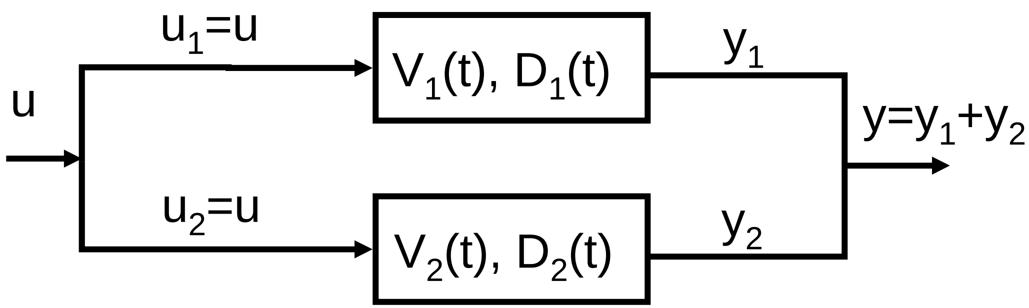


$$u = 0 \quad => \quad u_1^T y_1 = -y_2^T u_2$$

$$\dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) = -D_1(t) - D_2(t) \leq 0$$



Parallelschaltung



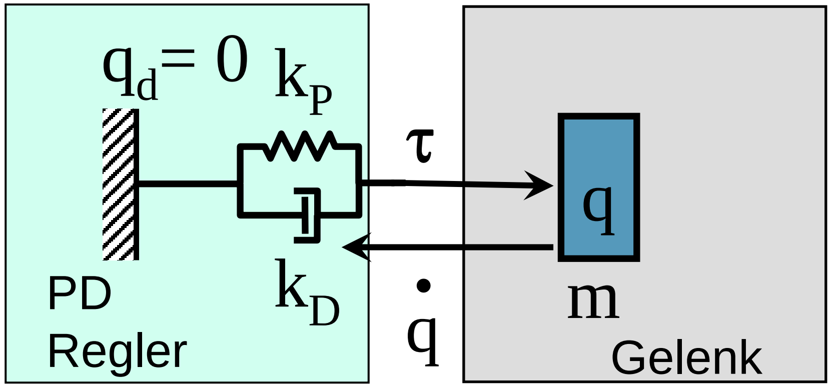
$$V = \sum_i V_i$$

$$D = \sum_i D_i$$

Lageregelung 1 Gelenk

(Wie formuliere ich den PD- Regler, so dass ich die Analyse für den nichtlin. Roboter verallgemeinern kann?)

(Wiederholung RS2)



Regler:

$$\tau = -k_P q - k_D \dot q$$

$$\dot V_1 = k_P q \dot q = -\tau \dot q - k_D \dot q^2$$

Strecke:

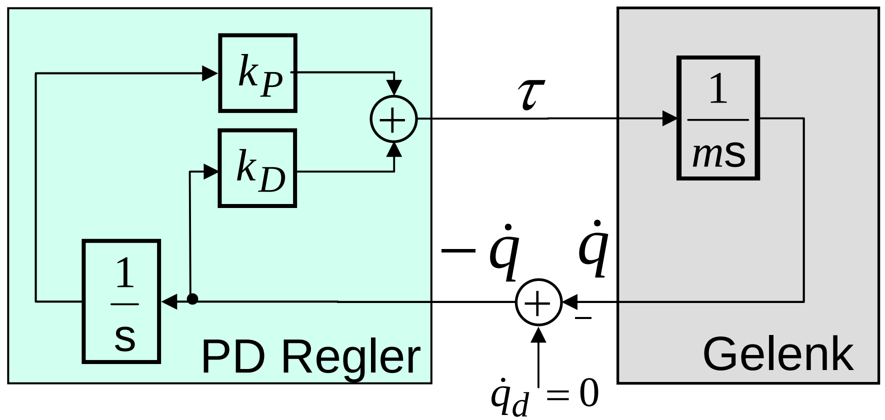
$$\tau = m \ddot q$$

konservatives System

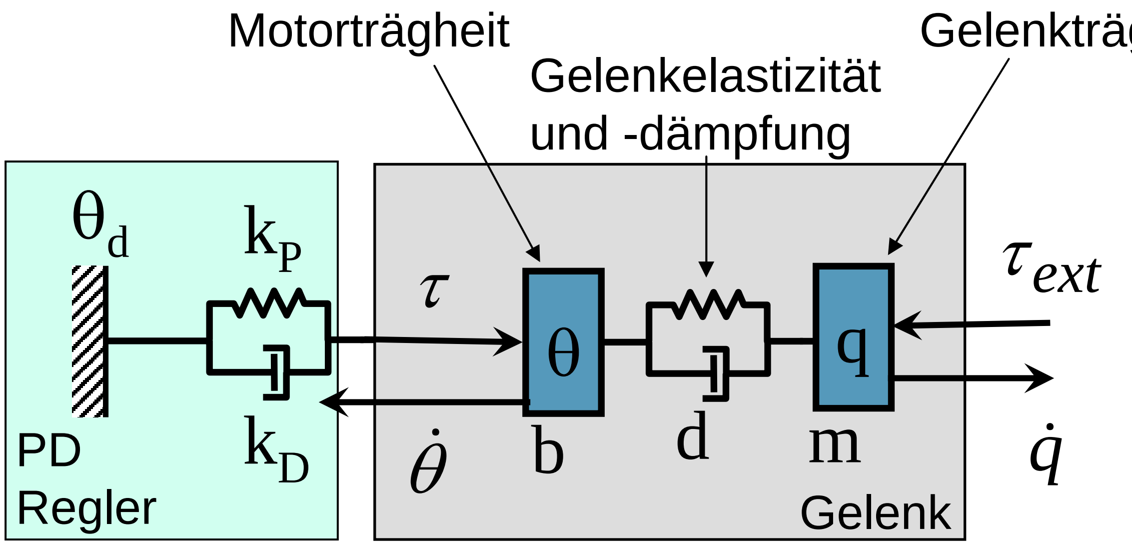
$$\dot V_2 = m \dot q \ddot q = \tau \dot q + 0$$

$$V(q, \dot q) = \frac{1}{2}(\underbrace{k_P q^2}_{V_1(q)} + \underbrace{m \dot q^2}_{V_2(\dot q)})$$

$$\dot V(t) = \underbrace{-k_D \dot q^2}_{D_1(\dot q)} \; \underbrace{+0}_{D_2(\dot q) = 0}$$



Verallgemeinerung elastisches Gelenk



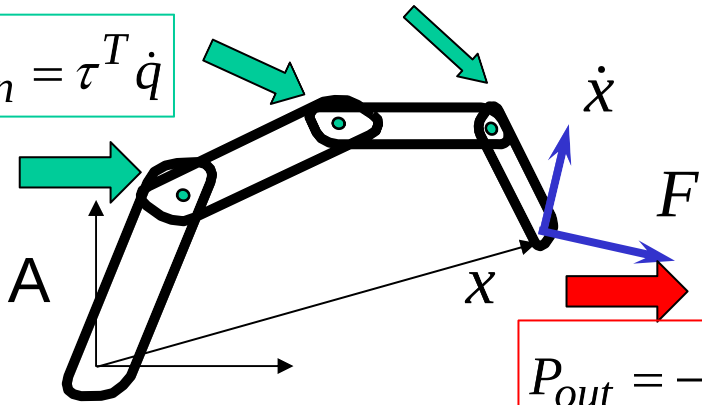
$$V(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{k_P \boldsymbol{\theta}^2}_{V_1(\boldsymbol{\theta})} + \underbrace{b\dot{\boldsymbol{\theta}}^2 + m\dot{\boldsymbol{q}}^2 + k(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{q})^2}_{V_2(\dot{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})}\Big]$$

$$\dot{V}(t) = \underbrace{-k_D \dot{\boldsymbol{\theta}}^2}_{D_1(\dot{\boldsymbol{\theta}})} - \underbrace{d(\dot{\boldsymbol{\theta}} - \dot{\boldsymbol{q}})^2}_{D_2(\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\boldsymbol{q}})}$$

Übung: schreiben Sie die Systemgleichungen auf, leiten Sie $\dot{V}(t)$ her und malen das Blockdiagramm auf, genauso wie beim starren Gelenk

Roboter: Passive Darstellung

$P_{in} = \tau^T \dot{q}$



$P_{out} = -F^T \dot{x} = -\tau_{ext}^T \dot{q}$

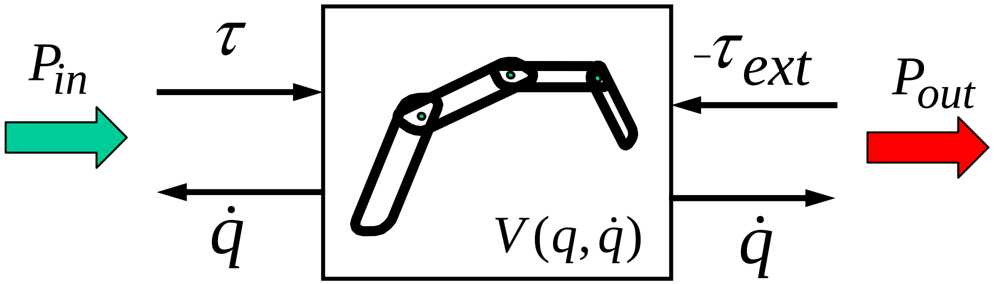
Energie:

$$V(q,\dot{q}) = \overbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}}^{\text{kinetische Energie } T} + \underbrace{V_g(q)}_{\text{potentielle Energie } U}$$

Mit dem Lagrange Formalismus erhält man die Bewegungsgleichungen

$$M(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = \tau - \tau_{ext}$$

Wir suchen eine passive Darstellung des Roboters:



Eigenschaft der Corriolis und Zentrifugalterme

$$\boxed{v^T\left(C(q,\dot{q})-\frac{1}{2}\dot{M}(q)\right)v=0}$$

für jeden Vektor v,
speziell auch für $v=\dot{q}$

(ab da Zusatzfolie)

Tensor dritter Ordnung

$$c_k(q,\dot{q})=\sum_{i,j}\underbrace{c_{kji}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j}\qquad k=1,\ldots,n$$

$$c_{kji}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}+\frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j}-\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right)$$

oder

$$c_k(q,\dot{q})=\sum_j C_{kj}(q,\dot{q}_i)\dot{q}_j$$

Tensor zweiter Ordnung

oder als Matrix:

$$\boxed{c(q,\dot{q})=C(q,\dot{q})\dot{q}}$$

Die Matrix $C(q,\dot{q})$ hat die Eigenschaft

$$C(q,\dot{q})+C^T(q,\dot{q})=\dot{M}(q)\quad\Leftrightarrow\quad\underbrace{C(q,\dot{q})-\frac{1}{2}\dot{M}(q)}_{\text{schiefsymmetrisch}}=-\left(C(q,\dot{q})-\frac{1}{2}\dot{M}(q)\right)^T$$

Roboter: Passive Darstellung

Energie: $V(q,\dot q) = \frac{1}{2}\dot q^T M(q)\dot q + V_g(q)$

Roboter: $M(q)\ddot q + C(q,\dot q)\dot q + g(q) = \tau - \tau_{ext}$

$$\dot V = \dot q^T M(q)\ddot q + \frac{1}{2}\dot q^T \dot M(q)\dot q + \frac{\partial V_g(q)}{\partial q}\dot q$$

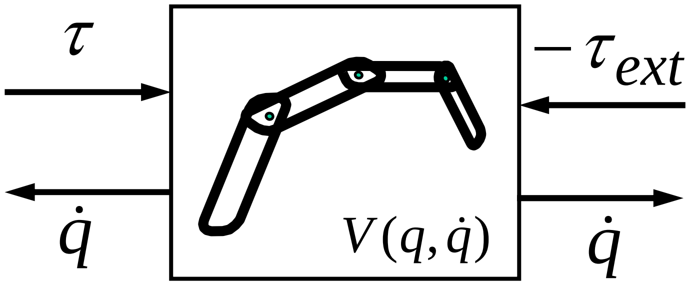
$$= -\dot q^T\left(C(q,\dot q)\dot q + g(q) - \tau + \tau_{ext}\right) + \frac{1}{2}\dot q^T \dot M(q)\dot q + g^T(q)\dot q$$

$$\boxed{\dot V(t) = \underbrace{\tau^T \dot q - \tau_{ext}^T \dot q}_{\text{Eingangsleistung}}} + 0$$

Energievariation

dissipierte Leistung

$P_{in} = \tau^T \dot q$



$P_{out} = -\tau_{ext}^T \dot q$

Passivitätsbasierte Gelenkregelung

Roboter mit PD-Regler und Schwerkraftkompensation

Einfachster Regler auf Gelenkebene für reine Positionsregelung (kein Kontakt)

Nur zur Lageregelung geeignet

Zunächst wird die Schwerkraft kompensiert:

$$\tau = \tau_1 + g(q) \qquad \Rightarrow$$

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} = \tau_1$$

PD-Regler:

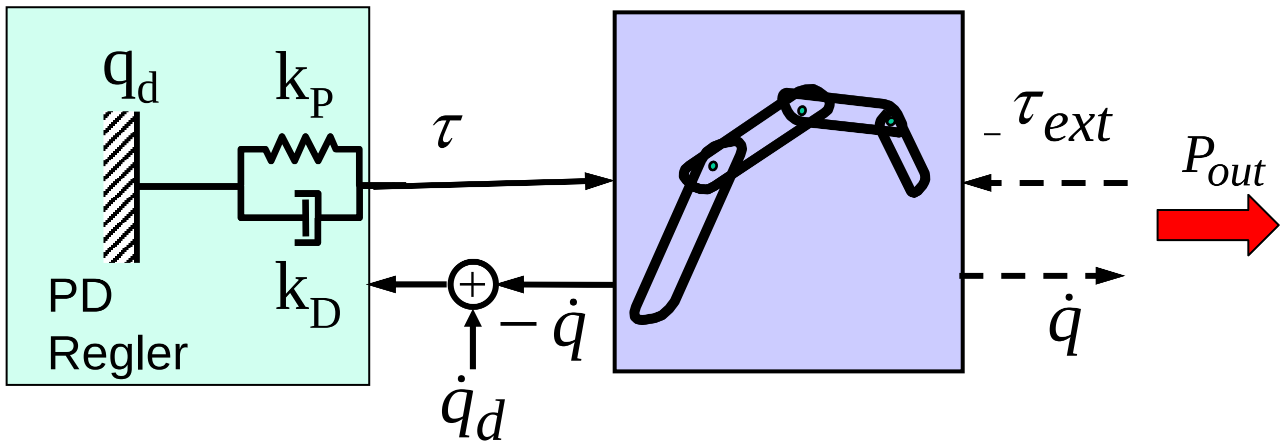
$$\tau_1 = k_P(q_d - q) - k_D\dot{q}$$

Gesamtsystem

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + k_D\dot{q} + k_P(q - q_d) = 0$$

Das Gesamtsystem kann wiederum als Rückkopplung zweier passiver Systeme dargestellt werden

Passivität PD-Regler



Speicherfunktion:

$$V(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\left(e^T K_P e + \dot{q}^T M(q)\dot{q}\right) \qquad e = q - q_d$$

Passivitätsbeziehung:

$$\dot{V}(t) = -\dot{q}^T k_D \dot{q} \qquad (-\tau_{ext}^T \dot{q}) \leftarrow \text{bei Kontakt mit Umgebung}$$

Passivität und Lyapunov-Stabilität

(siehe RS2)

Es liegt auf der Hand, die Speicherfunktion als Lyapunov-Funktion zu benutzen

$V(q,\dot{q})$ ist positiv definit

$\dot{V}(q,\dot{q})$ ist negativ semi-definit (negativ definit nur in $\dot{q}$, nicht in q)

Daraus folgt:

1) Der Roboter mit PD-Regelung und Gravitationskompensation ist stabil

(Folgt aus der Definition von Stabilität im Sinne von Lyapunov – RS2)

2) Das System ist global asymptotisch stabil (g.a.s.)

(Folgt mit Hilfe des LaSalle Invarianztheorems– RS2)

„Das System konvergiert zur größten Invarianzmenge in der Menge Ω, für die $\dot{V}(q,\dot{q})=0$ „

d.h. $\Omega=(q\in\mathbb{R},\dot{q}=0)$

in diesem Fall gilt

$$M(q)\ddot{q}+c(q,\dot{q})+k_D\dot{q}+k_P(q-q_d)=0$$

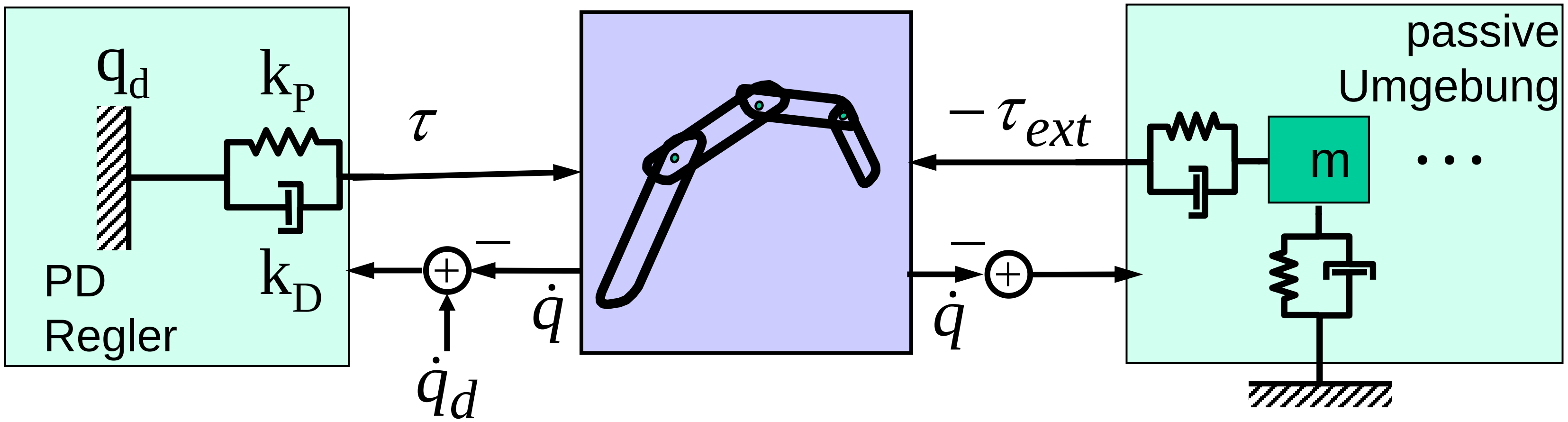
$$\ddot{q}=M^{-1}(q)K_P(q-q_d)$$

Das System verlässt Ω wenn $q\neq q_d$,d.h. $q=q_d$ ist die größte Invarianzmenge

Robustheit

Das System bleibt stabil für:

-beliebige Reglerwerte
-beliebige Parameterungenauigkeiten des Dynamikmodells
-beliebige, passive, unmodellierte Dynamik (Reibung, Elastizitäten)
-Kontakt mit passiven Umgebungen



Praktische Einschränkungen:

- digitale (zeitdiskrete) Implementierung
- Sensorquantisierung und –rauschen
- Motordynamik

sollten berücksichtigt und deren Einfluss minimiert werden

Zusatzfolie: Lineare Reglerauslegung

(kann ich wirklich einen linearen Regler ohne Gewissensbisse benutzen?)

Wir haben gezeigt, dass ein linearer Lageregler für das komplette nichtlineare Modell g.a.s. ist!

Man bringe das Robotermodell in die nichtlineare Standardform:

$$\dot{x} = f(x,u)$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M^{-1}(\tau - C(q,\dot{q})\dot{q}) \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}; \quad u = \tau$$

Durch Linearisierung um den konstanten Sollpunkt (Lageregelung) $\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} q_d \\ 0 \end{bmatrix}$ erhält man das lineare Modell

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{q} \\ \Delta\ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta\dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M(q_d)^{-1} \end{bmatrix} \Delta\tau \qquad \text{oder einfach} \qquad \boxed{M(q_d)\Delta\ddot{q} = \Delta\tau}$$

Dafür kann in der Tat ein linearer PD Regler entworfen werden, der auch im nichtlinearen Fall g.a.s. ist

PD+ Regler

(Was ist die einfachste Verallgemeinerung auf den Fall der Bahnregelung?)

Eine Erweiterung des PD-Reglers für eine Bahnregelung mit Hilfe einer Vorsteuerung ist naheliegend

$$\tau = \tau_d + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q)$$

(Linearisierung um Sollbahn)

$$\tau_d = M(q_d)\ddot{q}_d + C(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d + g(q_d)$$

Nur eine lokale Stabilitätsanalyse ist in diesem Zusammenhang möglich

Stattdessen betrachte man nun

$$\tau_d = M(q)\ddot{q}_d + C(q, \dot{q})\dot{q}_d + g(q)$$

Geschlossene Reglerschleife

$$M(q)\ddot{e} + C(q, \dot{q})\dot{e} + K_D\dot{e} + K_P e = 0$$

$$e(q,t) = q - q_d(t)$$

Die globale Stabilität folgt dann mit der Lyapunov Funktion

$$V(e, \dot{e}) = \frac{1}{2}\left(e^T K_P e + \dot{e}^T M(q)\dot{e}\right)$$

und deren Ableitung: $\dot{V}(t) = -\dot{e}^T k_D \dot{e}$

PD+ Regler

$$q = e - q_d(t)$$

Bemerkung: dies ist ein zeitvariantes System (zum Unterschied vom Lage-regler), da die Zeit explizit, getrennt von e vorkommt! Das LaSalle-Theorem kann somit nicht benutzt werden!

mögliche Lösung: Barbalat Lemma

Für diesen Regler kann aber auch eine strikte Lyapunov-Funktion aufgestellt werden $\dot{V}(q, \dot{q}, t) \leq 0, \ \forall q, \dot{q} \neq 0$ mit Hilfe derer globale asymptotische Stabilität nachgewiesen werden kann.

Bemerkungen:

- Im Gegensatz zum Entkopplungsregler, ist die Dynamik weder linear noch entkoppelt
- Die Dämpfung kann bei konstanter Masse und Steifigkeit für optimale Performance in jedem Arbeitspunkt ausgelegt werden

Dämpfungsentwurf

(Wie lege ich die Dämpfungsmatrix für optimale Performance mit dem PD-Regler aus?)

Voraussetzungen:

- Die Massenmatrix verändert ihre Einträge stellungsabhängig
- Die Massenmatrix wird als quasistationär angenommen
- Es wird eine konstante Steifigkeit angenommen

Wie soll die Dämpfung ausgelegt werden, damit das System gut gedämpft ist?

Beispiel: eindimensionaler, linearer Fall (konstante Masse):

$$m\ddot{q} + d\dot{q} + kq = 0 \qquad d = 2\xi\sqrt{mk}, \quad 0 \le \xi \le 1$$

zwei reelle Pole

Verallgemeinerung auf den Matrizenfall:

A-p.d., sym. $\exists A_1$ sym, p.d, so dass $A_1 A_1 = A$

Wurzel einer p.d., symmetrischen Matrix

$$K_{P1} K_{P1} = K_P$$

$$M_1 M_1 = M \qquad K_D = \xi\left(M_1 K_{P1} + K_{P1} M_1\right)$$

Dämpfungsentwurf

z.B. für eine quasistatische (linearisierte) Approximation der Roboterdynamik

$$M\ddot{e} + K_D\dot{e} + K_P e = 0$$

$$\xi = 1$$

$$K_D = \left(M_1 K_{P1} + K_{P1} M_1 \right)$$

folgt

$$M_1 M_1 \ddot{e} + M_1 K_{P1}\dot{e} + K_{P1} M_1 \dot{e} + K_{P1} K_{P1} e = 0$$

oder , äquivalent

$$M_1\dot{e} + K_{P1} e = w \longleftarrow \text{Zwischenvariable}$$

$$M_1\dot{w} + K_{P1} w = 0$$

Zwei Differentialgleichungen erster Ordnung und somit reelle Eigenwerte

Bemerkung: Die quasistatische Approximation wird nur in der Dämpfungsauslegung benutzt, die Stabilität gilt nach wie vor für das nichtlineare System!

G.E.S. Passivitätsbasierter Bahnregler

(Bekannt als Slotine and Li Regler)

Strecke:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

Regler:

$$\tau = M(q)\dot{v} + C(q,\dot{q})v + g(q) - Kr$$

mit $\quad v = \dot{q} - r$

Tracking Error $\quad r = (\dot{q} - \dot{q}_d) + \Lambda(q - q_d)$

Λ, K - diagonale, konstante Matrizen

Die geschlossene Reglerschleife ist dann:

$$\boxed{\begin{aligned} &M(q)\dot{r} + C(q,\dot{q})r + Kr = 0 \\ &r = \dot{e} + \Lambda e \end{aligned}}$$

Beispiel:

Für ein eindimensionales, lineares Gelenkmodell

$$m(\ddot{e} + \lambda\dot{e}) + k(\dot{e} + \lambda e) = 0$$

Laplace-Bereich: $(ms + k)(s + \lambda)e(s) = 0$

Pole: $\quad s_1 = -\dfrac{k}{m} \qquad s_2 = -\lambda$

Stabilität und Konvergenz

(für Slotine und Li Regler)

Lyapunov Funktion:

abstrakter, keine Analogie mehr zu einer physikalischen Energie

$$V(e,\dot{e}) = \frac{1}{2} r^T M(q) r + e^T \Lambda K e$$

und deren Ableitung

$$\dot{V}(e,\dot{e}) = \frac{1}{2} r^T \dot{M}(q) r + r^T M(q) \dot{r} + 2 e^T \Lambda K \dot{e}$$

durch Einsetzen aus den Systemgleichungen:

$$M(q)\dot{r} = -C(q,\dot{q})r - Kr$$

$$\dot{V}(e,\dot{e}) = r^T \underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q,\dot{q}) \right)}}_{=0} r + r^T K r + 2 e^T \Lambda K \dot{e}$$

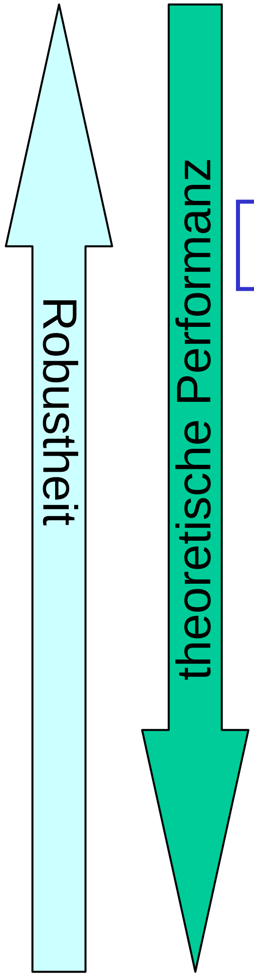
$$r = \dot{e} + \Lambda e$$

$$\boxed{\dot{V}(e,\dot{e}) = -\dot{e}^T \Lambda K \Lambda \dot{e} - e^T K e \quad < 0}$$

negativ definit, es wird also nicht LaSalle gebraucht!

-Daraus resultiert direkt die globale asymptotische Stabilität (g.a.s)
-Es kann sogar nachgewiesen werden, das das System (g.e.s)

Zusammenfassung Gelenkregler



Lageregler (PD + g(q))	g.a.s.	für q_d konstant
Bahnregler (PD + g(q) + Vorsteuerung)	l.s.	
Bahnregler (PD+ Regler)	g.a.s.	(aufwendiger nachweisbar)
Bahnregler (Slotine & Li)	g.e.s.	
Computed Torque	g.e.s. linear, entkoppelt	

Zusammenfassung Gelenkregler

Ein bleibendes Problem ist die Behandlung von Modellfehlern und Störungen

-Gelenkreibung

-Ungenaue Last- und Roboterddaten (Masse, Schwerpunkt,Trägheiten,…)

-externe Störungen

hinsichtlich der Reglergenauigkeit

Mögliche Lösungen:

- Reibungskompensation (Modellbasiert)
- Integrator
- Störgrößenbeobachter und Störgrößenaufschaltung – wird in der Vorlesung später behandelt.
- Adaptive Regelung