Redundante Roboter: Dynamik

$$J^{\#} = A\ J^T \underline{(JAJ^T)^{-1}}$$

$$M_R = \underline{(JM^{-1}J^T)}^{-1}$$

Es lässt sich direkt überprüfen, dass für $A = M^{-1}(q)$ $\Updownarrow$

$$M_R(x) = J^{\#T}(q) M(q) J^{\#}(q)$$

Also, es gilt für die Pseudoinverse:

$$\boxed{J^{\#} = M^{-1}\ J^T (JM^{-1}J^T)^{-1}}$$

Übung: Man überprüfe, dass mit dieser Pseudoinversen, die beiden Ausdrücke für M_R äquivalent sind

kleine Formelsammlung

$(AB)^T = B^T A^T$ $\quad A, B -$ Matrizen

$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ $\quad A, B -$ invertierbare Matrizen

Eigenschaften der Massen- und Steifigkeitsmatrizen $\quad A \in \{M, K\}$

A ist positiv definit, d.h.

$$v^T A v > 0, \quad \forall v, \|v\| \neq 0$$

$$\angle(v, Av) < 90° \quad \forall v$$

Alle Eigenwerte von A sind positiv

A ist symmetrisch, d.h.

$$A^T = A$$

Da A symmetrisch, p.d. ist, so gilt das Gleiche für

$J^T A J$ $\quad$ wenn J – nicht singulär

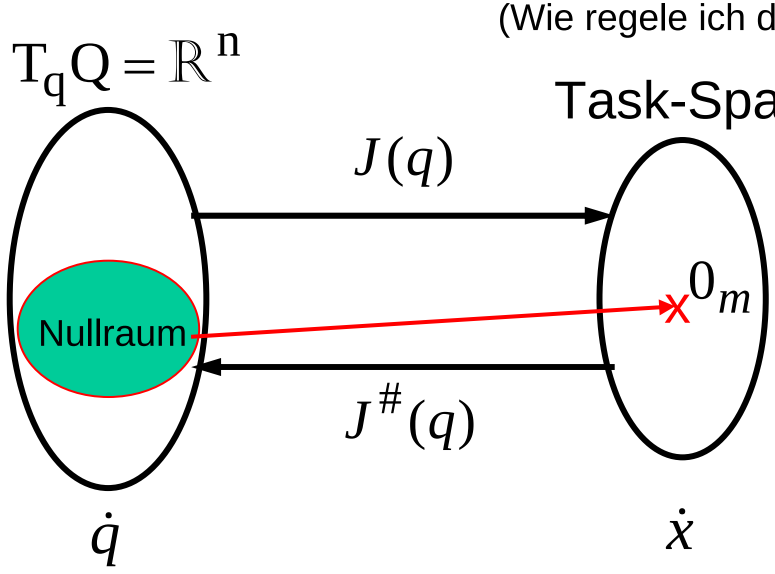
Orthogonale Zerlegung:

$A = U \Lambda U^T$ $\quad$ Λ - diagonal $\quad \lambda_i$ - Eigenwerte von A

U - orthogonale Matrix

Nullraumbewegung

(Wie regele ich das redundante System?)



Nullraumprojektion:

$$\dot{q}_N = (I - J^{\#}(q)J(q))\dot{q}_0$$

Überprüfung
$J(q)\dot{q}_N = 0$

Inverskinematik:

$$\boxed{\dot{q} = J^{\#}(q)\dot{x} + (I - J^{\#}(q)J(q))\dot{q}_0}$$

$$\delta q = J^{\#}(q)\delta x + (I - J^{\#}(q)J(q))\delta q_0$$

Interpretation der Pseudoinversen

(was bedeuten die unterschiedlichen Skalierungen in der Pseudoinversen?)

Inverskinematik: $\dot{q} = J^{\#}(q)\dot{x}$

$$\boxed{J^{\#} = A\ J^T (JAJ^T)^{-1}}$$

Aus „Grundlagen intelligenter Roboter" wissen Sie, dass für $A=I$, d.h.

$$J^{\#} = J^T (JJ^T)^{-1}$$

die Inverskinematik $\|\dot{q}\|$ minimiert, unter der Zwangsbedingung

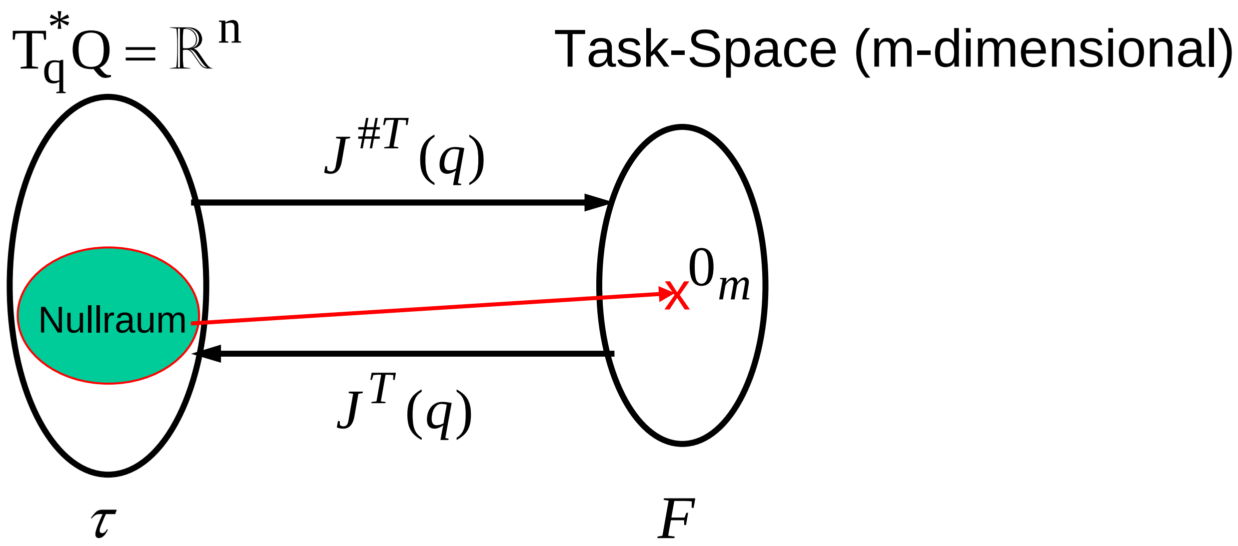
$$\dot{x} - J(q)\dot{q} = 0$$

Im Allgemeinen, wird für eine Gewichtungsmatrix A die Norm $\|\dot{q}\|_{A^{-1}}$ minimiert

D.h., für $A = \frac{1}{2} M^{-1}(q)$ wird die kinetische Energie minimiert:

$$\|\dot{q}\|_M^2 = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$$

Nullraummoment



Nullraumprojektion:

$$\tau_N = (I - J^T(q)J^{\#T}(q))\tau_0$$

Überprüfung
$J^{\#T}(q)\tau_N = 0$

Kommandiertes Gelenkmoment:

$$\boxed{\tau = J^T(q)F + (I - J^T(q)J^{\#T}(q))\tau_0}$$

kartesische Komponente
(primäre Aufgabe)

Nullraum – Komponente
(sekundäre Aufgabe)

Zusatzfolie: Nullraummoment

$$\boxed{\tau = J^T(q)F + (I - J^T(q)J^{\#T}(q))\tau_0}$$

Bemerkung: durch Einsetzen in

$$\boxed{J^{\#} = M^{-1}\ J^T(JM^{-1}J^T)^{-1}}$$

$$M(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q}) + g(q) = \tau$$

und Multiplikation mit $J(q)M(q)^{-1}$ folgt:

$$\underline{\ddot{x}} + JM^{-1}(c(q,\dot{q}) + g(q)) - \dot{J}\dot{q} = JM^{-1}J^{\#T}F +$$

$$+\underline{JM^{-1}(I - J^T J^{\#T})\tau_0}$$

$$\Downarrow$$

(Herleitung an der Tafel)

$$0!$$

Diese Pseudoinverse ist die einzige, die auch keine Beschleunigungen (nicht nur keine Kräfte) am TCP erzeugt = „dynamisch konsistent“

Zusatzfolie: Rücktransformation der Kartesischen Massenmatrix

Wenn man im redundanten Fall die kartesische Massenmatrix in Gelenkkoordinaten zurück transformiert,

$$M_J(q) = J^T(q) M_R(q) J(q)$$

erhält man nicht die komplette Massenmatrix im Gelenkraum, sondern nur den Anteil, der an am TCP sichtbar ist! Die Nullraumkomponente wird herausgefiltert, analog zur Transformation des Gelenkmomentes in TCP Koordinaten und zurück.

$$\boxed{M_J(q) \neq M(q)}$$

Stabilität im Nullraum

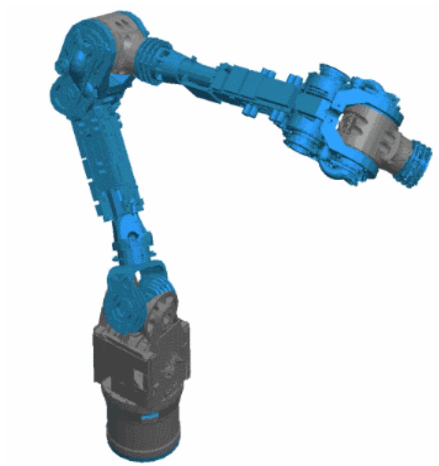
(Kann ein Roboter sich in kartesischen Koordinaten einschwingen und im Nullraum instabil sein?)

$$\boxed{M_R(q)\ddot{x} + c_R(q,\dot{q}) + g_R(q) = F}$$

Mit dem Computed Torque folgt eine lineare, entkoppelte Fehlerdynamik:

$$\boxed{\ddot{e} + D\dot{e} + Ke = 0} \qquad e = x_d - x$$

n=7, m=6



Die Nullraum Komponente sollte:

- mindestens ein Dämpfungsterm enthalten

$$\tau_0 = -D\dot{q}$$

- ein Term zur Vermeidung von Endanschlägen

$$\tau_0 = K_N(q_0 - q)$$

- evtl. Terme zur Kollisionsvermeidung, bzw. zur Optimierung weiterer Gütekriterien

Behandlung von Singularitäten

$$\dot{x}_m = J_{m\times n}(q)\dot{q}_n$$

$r > 0$

der Roboter ist singulär, wenn $\mathit{Rang}\{J_{m\times n}(q)\} = m - r < m$

für nicht redundante Roboter, heißt dies: $d(q) = \det(J_{m\times m}(q)) = 0$

für redundante Roboter, heißt dies: $d(q) = \det(J(q)J^T(q)) = 0$

mxm Matrix

$$d(q) = d_1(q)\cdot d_2(q)\cdot\ldots\cdot d_i(q)$$

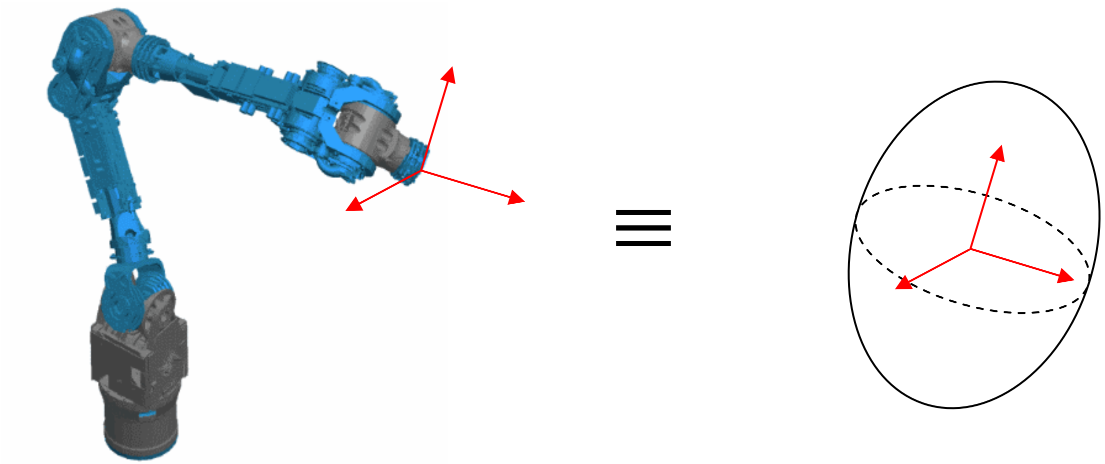
i unterschiedliche Typen von Singularitäten

In der Nähe von Singularitäten werden (m-r) Koordinaten geregelt und der Manipulator als redundanter Manipulator betrachtet.

Eine Regelung in singulärer Richtung (lokale Koordinate d_i) erfolgt im Nullraum der primären Aufgabe

Kartesische Trägheitseigenschaften

Für die Analyse des Kontaktverhaltens des Roboters (z.B.) bei Zusammenstößen mit der Umgebung ist auch ein redundanter Manipulator vollständig durch die kartesische Massenmatrix beschrieben



Wie gefährlich ist der Roboter wirklich?

Kartesische Trägheitseigenschaften

$$M_R = (JM^{-1}J^T)^{-1}$$

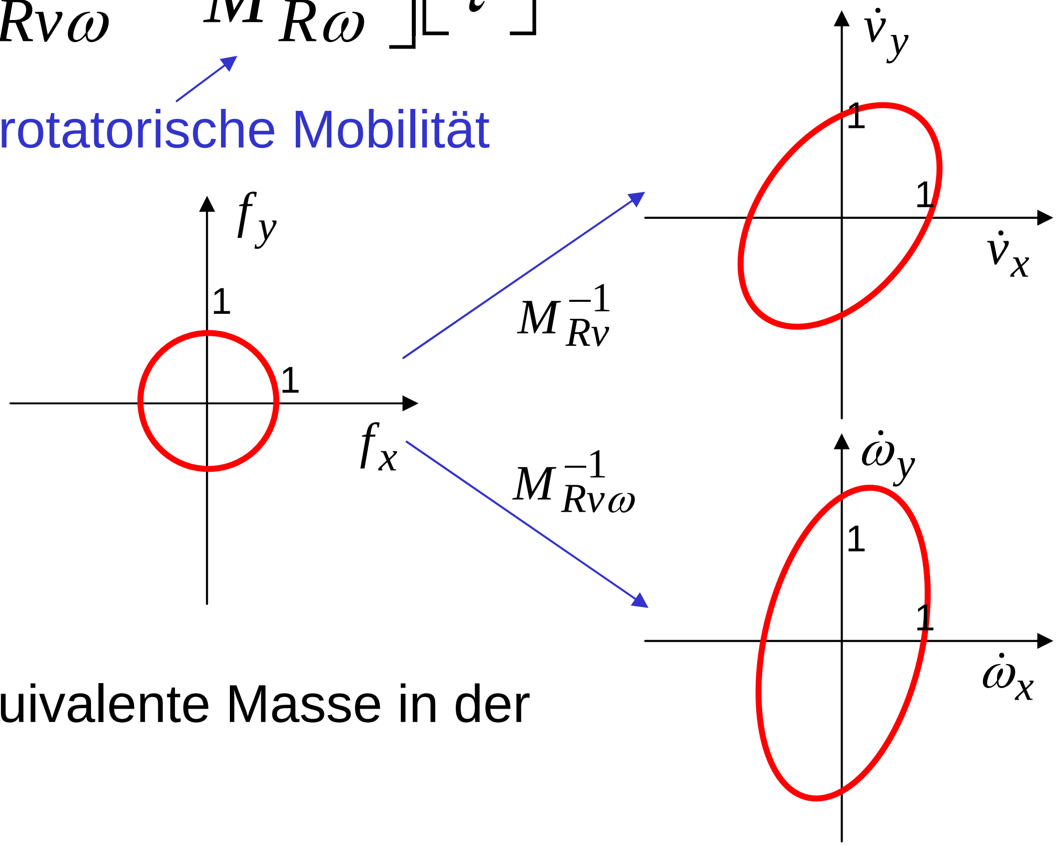
Partitionierung der Mobilitätsmatrix

translatorische Mobilität

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{Rv}^{-1} & M_{Rv\omega}^{-1} \\ M_{Rv\omega}^{-T} & M_{R\omega}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix}$$

Koppelterm rotatorische Mobilität

z.B. Einheitskraft am TCP :



Eigenwerte bedeuten eine äquivalente Masse in der entsprechenden Richtung

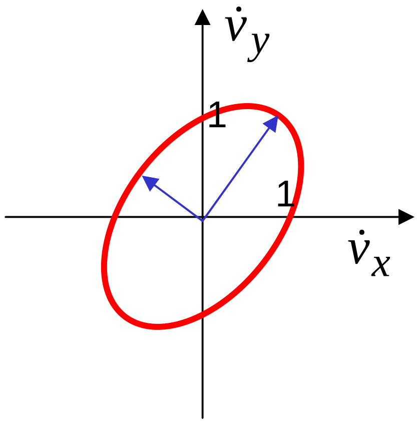
Kartesische Trägheitseigenschaften

Orthogonale Zerlegung:

$$A = U \Lambda U^T$$

Λ - diagonal $\quad \lambda_i$ - Eigenwerte von A

U - orthogonale Matrix



Eigenschaften:

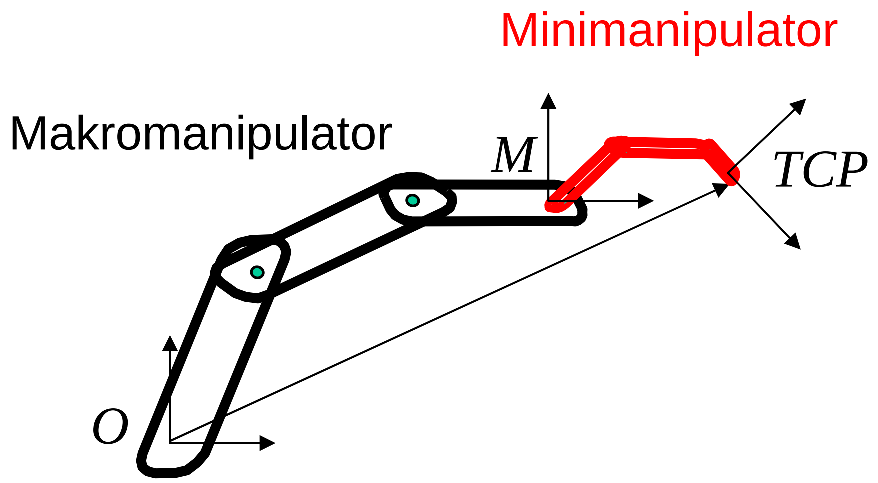
- nur entlang der Hauptachsen sind Kraft und Beschleunigung kollinear
- Hauptachsen sind orthogonal

Bemerkungen:

- Die Rotationen können analog behandelt werden
- Eigenwertsbetrachtungen für die komplette Mobilitätsmatrix (Massenmatrix) machen keinen Sinn.

Warum?

Makro-/Minimanipulation



(Ch. Ott und Th. Wimböck ICRA07)

Makro-/Minimanipulatoren können grundsätzlich als redundante Systeme behandelt werden

Nullraumkräfte zur Vermeidung der Endanschläge für den Minimanipulator sind im Allgemeinen erforderlich

Zusatzfolie: Makro-/Minimanipulation: Trägheitseigenschaften

Massenmatrix:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}$$

Massenmatrix des Minimanipulators

Zusammensetzung der Mobilitätsmatrix (ohne Beweis):

$$M_{R(O)}^{-1} = M_{m(M)}^{-1} + M_C^{-1}$$

(Beweis in Khatib: Lecture notes)

Mobilitätsmatrix des redundanten Makro-/Miniman.

Mobilitätsmatrix des Minimanipulators im Koordinatensystem M

Zusatzmobilität durch Makromanipulator

Die Trägheit des Makro-/Minimanipulators ist in jede kartesische Richtung kleiner oder gleich der Trägheit des Minimanipulators alleine!

$$\lambda_i(M_{Rv}) \leq \lambda_i(M_{mv})$$

$$\lambda_i(M_{R\omega}) \leq \lambda_i(M_{m\omega}) \qquad i = 1,\ldots,6$$