

Regelungstechnische Methoden in der Robotik

Dr.- Ing. Alin Albu-Schäffer

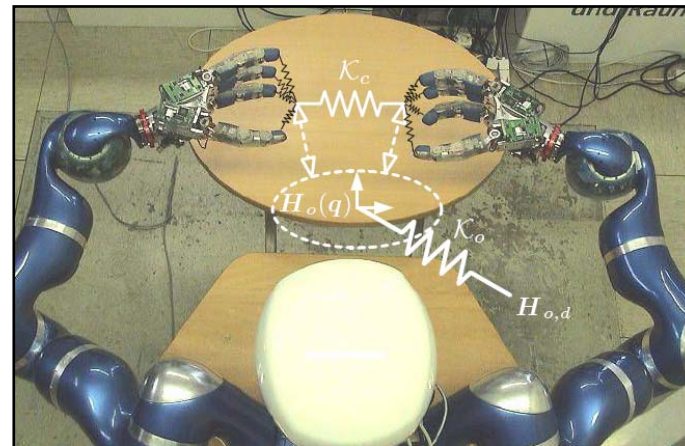


Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Institut für Robotik und Mechatronik



TU München
Lehrstuhl für Steuerungs- und Regelungstechnik

Wahlfach im Sommersemester 2010
Do, 13:30 – 15:00
Raum N0507



Die Vorlesung baut auf „Grundlagen Intelligenter Roboter“ (GIR) auf.
Es werden regelungstechnische Konzepte angewendet, die in
„Regelungstechnik II“ (RS2) (Prof. Buss) vorgetragen wurden.

Zielsetzung

Es werden Werkzeuge zur Modellierung und Regelung komplexer (z.B. humanoider) Robotersysteme in Interaktion mit unbekanntem Umgebungen vorgestellt.
Es soll eine Übersicht der wichtigsten regelungstechnischen Methoden vermittelt werden, die derzeit zur Regelung solcher Systeme eingesetzt werden.

Diese Vorlesung baut auf die Vorlesung „[Grundlagen Intelligenter Roboter](#)“ (GIR) von Dr. Kolja Kühnlenz auf. Des Weiteren werden regelungstechnische Konzepte angewendet, die in „[Regelungstechnik II](#)“ (RS2) (Prof. Buss) vorgetragen werden.

Inhalt der Vorlesung

- Einführung: Motivation, Trends in der Robotik
- Differentialgeometrie in der Robotik
 - Mannigfaltigkeiten
 - Orientierungsdarstellungen, SO_3 , SE_3
 - Koordinatentransformationen für Vektoren, Kovektoren, Tensoren
- Aufgabenorientierte Regelung – Entkopplung im Taks-Raum
 - Robotergleichungen und Regelung in aufgabenbezogenen Koordinaten
 - Redundante Systeme, Mikro-/Makromanipulation
 - inverse Kinematik
 - Entkoppelte Regelung in kartesischen und in Nullraum-Koordinaten
- Roboterregelung durch Energieformung (Energy-Shaping)
- Kollisionsvermeidung mit Potentialfeldern
- Nichtlineare Beobachter: Kollisions- und Fehlerdetektion
- Identifikation von Roboterparameter (Regressorbildung)
- Adaptive Roboterregelung ?
- Regelung/Steuerung komplexer kinematischer Ketten
 - Handregelung – Greifvorgänge
 - Zweiarmsysteme, humanoide Manipulatoren
- Erweiterte Robotermodelle: elastische Gelenke, elastische Strukturen ?

Organisatorisches

- Umfang: 2 SWS Vorlesung (Übungen werden in der Vorlesung gerechnet)
- Prüfung: Abschlussklausur
 - Dauer: 60Min. Termin wird 3 Wochen vor Vorlesungsabschluss festgelegt.
 - Es sind sämtliche Unterlagen zugelassen.
- Material: • ppt-Folien + Tafelanschrieb
- Web: www.robotic.dlr.de/Alin.Albu_Schaeffer/vorlesung
- Benutzername: *rnr10*, Passwort: *10rnr*
 - Meldungen
 - Vorlesungsfolien
 - Übungsmaterial
 - ausgewählte Veröffentlichungen (als Ergänzung)
- Feiertage, Vorlesungsausfall

Zielsetzung

Es werden Werkzeuge zur Modellierung und Regelung komplexer (z.B. humanoider) Robotersysteme in Interaktion mit unbekanntem Umgebungen vorgestellt.
Es soll eine Übersicht der wichtigsten regelungstechnischen Methoden vermittelt werden, die derzeit zur Regelung solcher Systeme eingesetzt werden.

Diese Vorlesung baut auf die Vorlesung „[Grundlagen Intelligenter Roboter](#)“ (GIR) von Dr. Kolja Kühnlenz auf. Des Weiteren werden regelungstechnische Konzepte angewendet, die in „[Regelungstechnik II](#)“ (RS2) (Prof. Bus) vorgetragen werden.

Differentialgeometrie in der Robotik

Differentialgeometrische Begriffe

- Motivation
- Mannigfaltigkeiten
- Tangentenvektoren und Tangentialraum
- Kotangentenvektoren und Kotangentialraum
- Transformation von Vektoren und Kovektoren
- Tensoren
- Koordinatentransformation für Tensoren

Motivation

Erstmals alle Klarheiten beseitigen ...

Was ist ein Vektor in der Robotik ?

gängige Auffassung: ein Element eines metrischen Vektorraumes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

z.B.: Gelenk-Position, -Geschwindigkeit, -Beschleunigung $\mathbf{q} \ \dot{\mathbf{q}} \ \ddot{\mathbf{q}}$
Gelenk-Drehmomente $\boldsymbol{\tau}$

kartesische Position, kartesische Geschwindigkeit

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

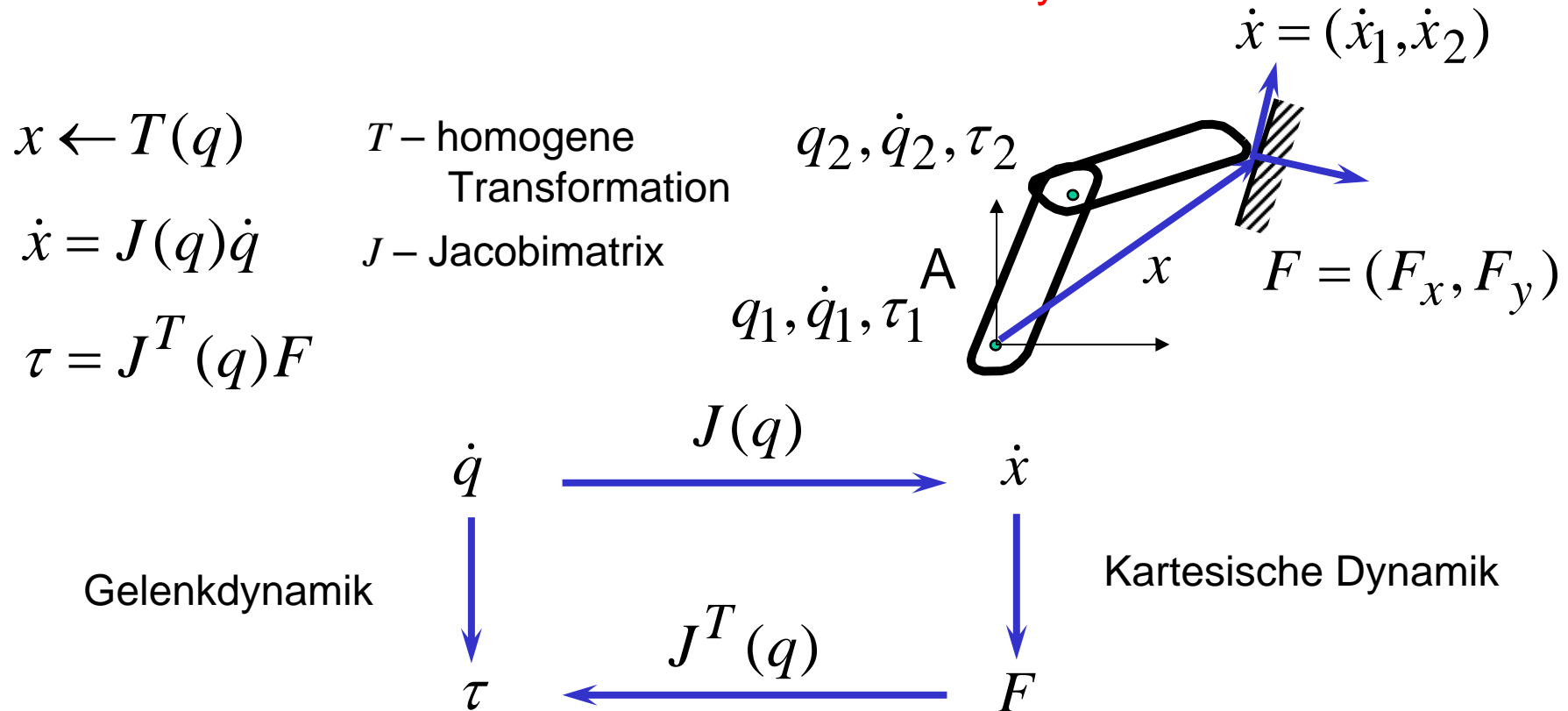
$$\dot{\mathbf{x}}_\omega = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

kartesische Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}$
kartesischen Kräfte/Momente

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

Was ist daran auszusetzen?

1. All diese “vektoriellen” Größen transformieren bekanntlich auf unterschiedliche Weise zwischen Koordinatensystemen.



Offensichtlich steckt dahinter eine reichere Struktur, als bloß vektorielle Räume
Eine differentialgeometrische Betrachtung ermöglicht ein tieferes Verständnis dieser Zusammenhänge

Was ist daran auszusetzen?

2. Die 6-dimensionalen vektoriellen Räume der kartesischen Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten (twists) und der kartesischen Kräfte und Momente (wrench) sind keine metrischen Räume!

$$\dot{\mathbf{x}}_{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

Weder **Skalarprodukt** $y_1^T \cdot y_2$ noch die daraus resultierende

Vektornorm $\|y\| = \sqrt{y^T \cdot y}$

können physikalisch sinnvoll definiert werden, d.h.:

- unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems
- unabhängig von den Maßeinheiten

Was ist daran auszusetzen?

Beispiel:

$$\dot{x}_1 = [1,1,1,2,2,2]^T \quad \dot{x}_2 = [2,2,2,-1,-1,-1]^T \quad \Rightarrow \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2 = 0$$

mit Geschwindigkeit [m/s], Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

aber

mit Geschwindigkeit [mm/s], Winkelgeschwindigkeit [rad/s]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= [1 \cdot 10^3, 1 \cdot 10^3, 1 \cdot 10^3, 2, 2, 2]^T \\ \dot{x}_2 &= [2 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^3, -1, -1, -1]^T \end{aligned} \quad \Rightarrow \dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2 \neq 0$$

⇒ Vorsicht ist geboten, bei der Verallgemeinerung des
(für Translationen) vertrauten Begriffes der Orthogonalität auf
Twist und Wrenches

Was ist daran auszusetzen?

3. Rotationen in 3D werden nicht durch ein Vektorraum beschrieben (im Gegensatz zu Translationen).
- z.B. Rotationen sind bekanntlich nicht kommutativ

Weitere Vorsicht ist somit geboten bei Verallgemeinerung von Vorstellungen von Steifigkeiten, Potentiale, Reglerauslegung vom translatorischen Fall auf den rotatorischen Fall.

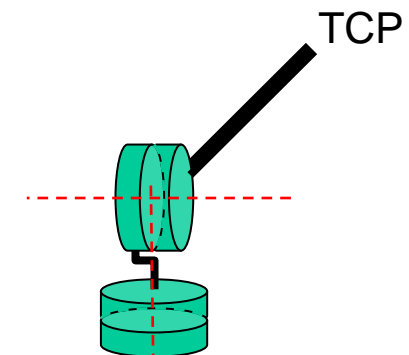
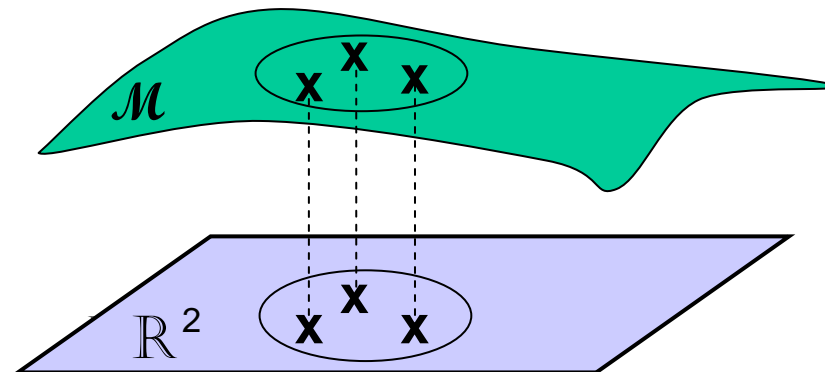
Mannigfaltigkeiten

Was ist der Raum aller Konfigurationen einer Roboterspitze?

Eine differentielle Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum der lokal diffeomorphisch zum Euklidischen Raum \mathbb{R}^m ist.

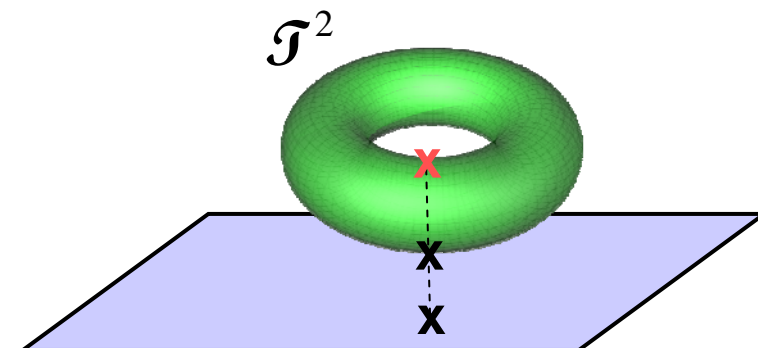
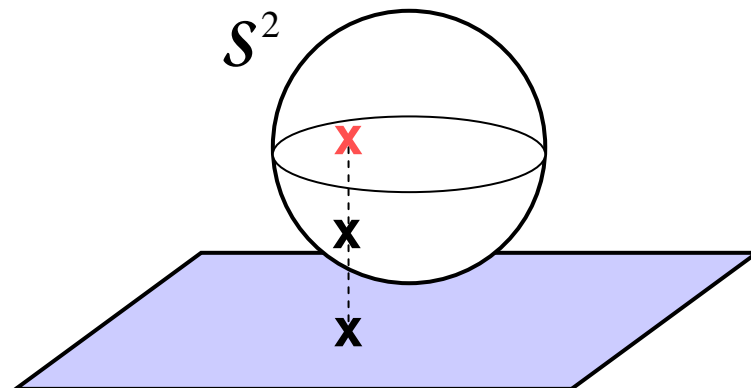
Ein Diffeomorphismus ist eine differenzierbare Funktion, die unkehrbar ist und deren Umkehrfunktion ebenfalls differenzierbar ist.

Beispiel:



Welche Mannigfaltigkeit beschreibt das TCP dieses Roboters? Und seine Gelenke?

Warum nur lokal?:



Eingebettete Mannigfaltigkeiten

Eine eingebettete Mannigfaltigkeit ist ein Unterraum von \mathbb{R}^n , definiert durch die Lösungsmenge einer Vektorfunktion $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

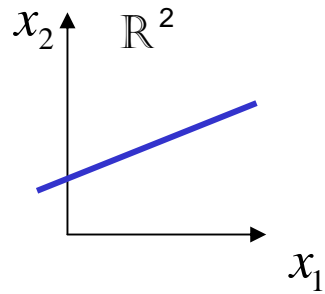
$$\begin{aligned} h_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ h_p(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (1) \quad n > p$$

Gibt es p Koordinaten, so dass die Jakobimatrix $\frac{\partial(h_1, \dots, h_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(x_0)$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ invertierbar ist, so hat die Mannigfaltigkeit in der Umgebung des Punktes die Dimension $m=n-p$ und (1) kann (Satz über implizite Funktionen) lokal aufgelöst werden

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1, \dots, x_m) \\ &\vdots \\ x_p &= f_p(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

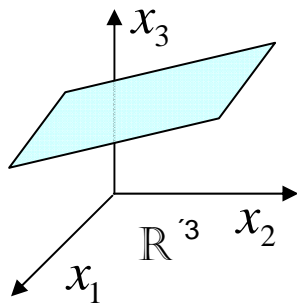
(x_1, \dots, x_m) sind dann lokale Koordinaten in der Umgebung von x_0

Eingebettete Mannigfaltigkeiten: Beispiele



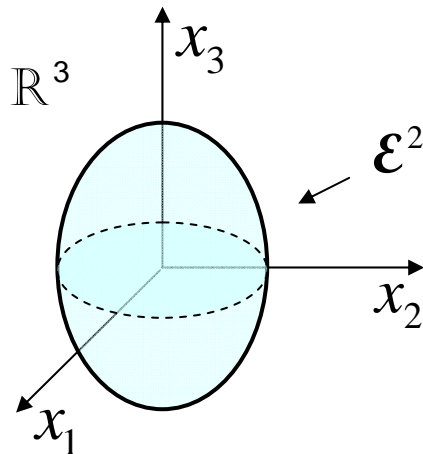
$$h_1(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + \alpha = 0$$

$$x_1 \text{ - lokale Koordinate} \quad x_2 = -\frac{1}{b}(ax_1 + \alpha)$$



$$h_1(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + \alpha = 0$$

$$x_1, x_2 \text{ - lokale Koordinaten} \quad x_3 = -\frac{1}{c}(ax_1 + bx_2 + \alpha)$$



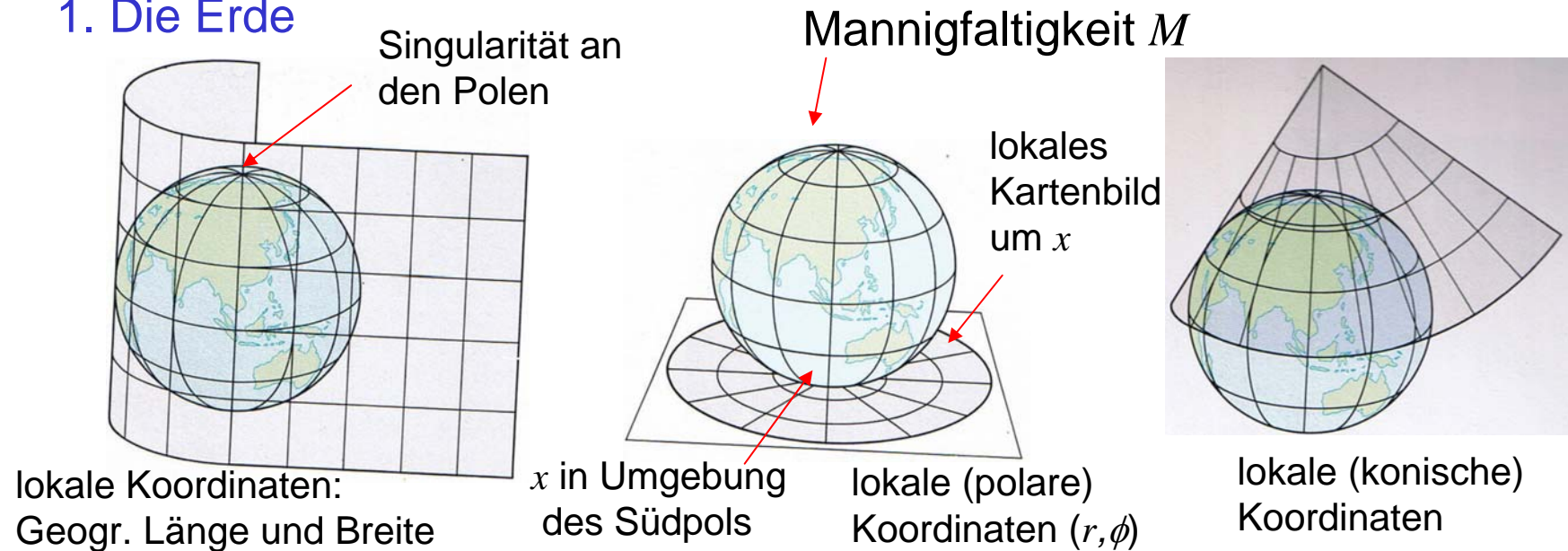
$$h_1(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 - r = 0$$

$$x_1, x_2 \text{ - lokale Koordinaten} \quad x_3 = \sqrt{\frac{1}{c}(r - ax_1^2 - bx_2^2)}$$

(z.B. für die Nordhalbkugel)

Mannigfaltigkeiten: Beispiele I

1. Die Erde



Lokale Koordinaten: zu jedem Punkt x in M existiert eine Teilmenge U in M die x enthält, und eine bijektive Abbildung

$$\varphi: U \rightarrow U_\varphi \quad U_\varphi \subset \mathbb{R}^n$$

φ - Kartenabbildung

U_φ - Kartenbild

$x_\varphi \in \mathbb{R}^n$ - lokale Koordinaten

Um eine Mannigfaltigkeit zu beschreiben, braucht man im Allgemeinen mehrere, überlappende Karten => Atlas

Wechsel der Koordinaten: die Karten (U, φ) und (V, ψ) enthalten x

$$x_\varphi = \varphi(\psi^{-1}(x_\psi))$$

Mannigfaltigkeiten: Beispiele II

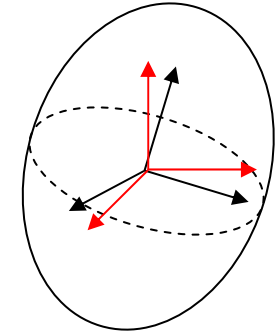
2. Orientierung eines Starrkörpers

bekanntlich beschrieben durch eine Rotationsmatrix $R_{3 \times 3}$

Eigenschaften: $R^T R = I$ - orthogonal
 $\det(R) = 1$ - rechtshändiges Koordinatensystem

Der Konfigurationsraum besteht aus der Menge aller Rotationsmatrizen und wird als **SO(3) –Special Orthogonal Group** bezeichnet

Übung: Man überprüfe, dass SO(3) eine Gruppe ist



SO(3) ist eine **3 – dimensionale Mannigfaltigkeit**, eingebettet z.B. in \mathbb{R}^9 zu dem die Menge aller 3x3 Matrizen isomorph ist

Lokale Koordinaten, z.B.:

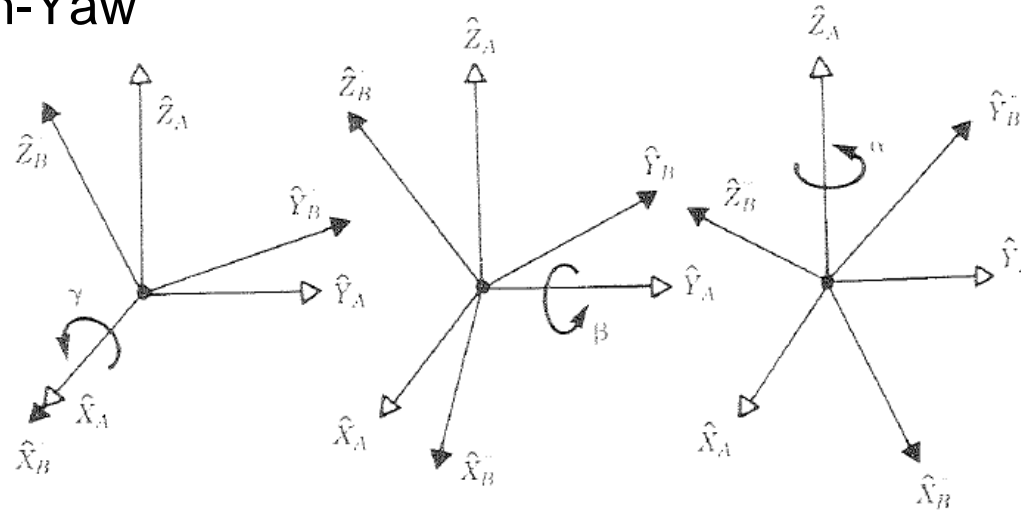
- Eulerwinkel (α, β, γ) (mit Varianten)
- Angle-Axis Darstellung (r, θ)
- Roll-Pitch-Yaw Winkel (α, β, γ)

Kleinste singularitätsfreie Darstellung \mathbb{R}^4 : z.B. Quaternionen

Zusatzfolie: Rotationsdarstellung

(Wiederholung aus Grundlagen Intelligenter Roboter)

Roll-Pitch-Yaw

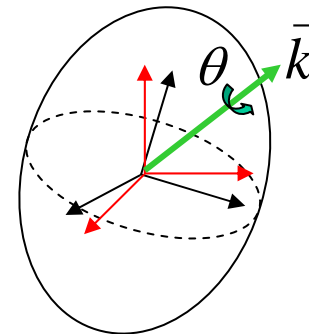


Angle axis Darstellung

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right)$$

$$k = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Singulär für
 $\theta = n\pi!$



$$\|\vec{k}\| = 1$$

Quaternionen (Euler Parameter) **nicht minimal**, **singularitätsfrei**

$$\lambda = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = \left[\cos \frac{\theta}{2}, \vec{k} \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

Mannigfaltigkeiten: Beispiele III

3. Konfiguration eines Starrkörpers in dreidimensionalen Raum

bekanntlich beschrieben durch eine homogene Transformation $T_{4 \times 4}$

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad p - \text{Position}$$

Der Konfigurationsraum besteht aus der Menge aller homogenen Transformationen und wird als **SE(3) –Special Euklidian Group** bezeichnet (= $SO(3) \times \mathbb{R}^3$) **6 – dimensionale Mannigfaltigkeit**

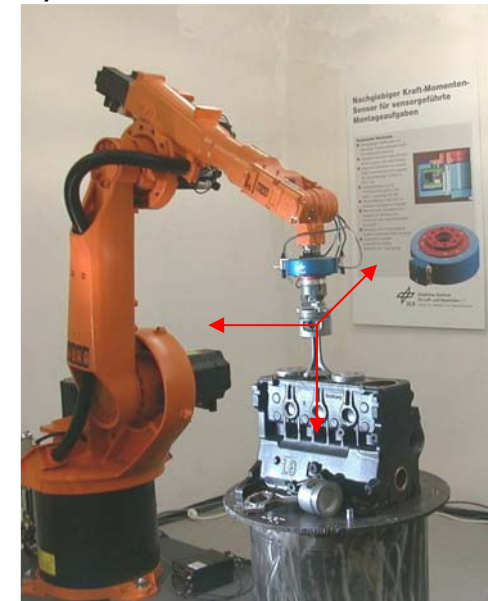
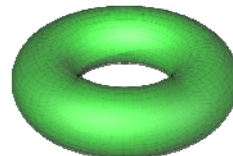
Lokale Koordinaten, z.B.: - $x=(p_x, p_y, p_z, \alpha, \beta, \gamma)$ (mit Varianten)

4. Konfiguration eines (6-Achsigen) Roboters Q

Gelenkwinkel $q: \mathbb{R}^6$ - globale Karte

Lokal um einen Punkt q_0 kann die Vorwärtskinematik $x=f(q)$ als eine Abbildung zwischen Koordinaten zweier Mannigfaltigkeiten angesehen werden.

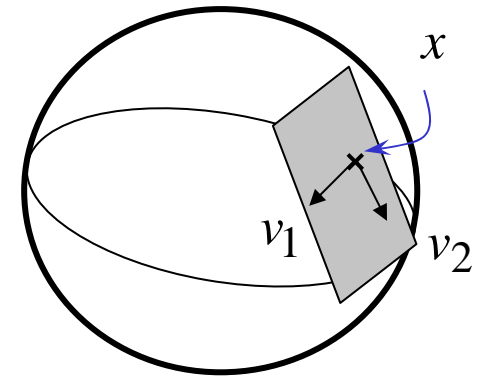
5. Konfigurations- und Arbeitsraum eines nicht planaren, 2-Achsigen Roboters mit endlos drehenden Achsen ist jeweils ein Torus



Tangentenvektoren und Tangentialraum

(kontravariante Vektoren oder einfach Vektoren)

Gegeben eine m - dimensionale Mannigfaltigkeit, definiert man an jedem Punkt x den Tangentialraum $T_x M$ als den m - dimensionalen Vektorraum aller möglichen Geschwindigkeiten in x (entlang der Mannigfaltigkeit).



Ausschließlich diese Größen werden in der Differentialgeometrie als „Vektoren“ bezeichnet. Dargestellt werden sie als Spaltenvektoren.

Beispiele:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Vektor auf Q

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Vektor auf $SE3$

Vektor auf $SO3$

Gelenkgeschwindigkeit in \mathbb{R}^n

Kartesische Geschwindigkeit in $SE3$

Kotangentenvektoren und Kotangentialraum

(Kovektoren, Kovektorraum)

Der **Kotangentialraum** T_x^*M in einem Punkt x der Mannigfaltigkeit M ist der lineare Vektorraum aller linearen Funktionale

$$\eta: T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

Die Elemente η des Kotangentialraumes werden **Kotangentenvektoren (Kovektoren)** genannt.

Für eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit hat der Kovektorraum auch Dimension m .

Beispiele:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_i \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}$$

Drehmoment im Gelenkraum

$$\tau(\dot{q}) = \tau^T \cdot \dot{q} = P$$

Leistung

$$f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

Kartesische verallgemeinerte Kraft

$$f(\dot{x}) = f^T \cdot \dot{x} = P$$

Transformation von Vektoren und Kovektoren

Warum ist die Unterscheidung Vektor – Kovektor überhaupt wichtig?

Vektoren und Kovektoren transformieren unterschiedlich bei Abbildungen zwischen Koordinatensystemen oder zwischen Mannigfaltigkeiten

Beispiel:

Die Vorwärtskinematik $x=f(q)$ ist eine lokale Abbildung zwischen Q und $SE3$

Bekanntlich transformieren die Geschwindigkeiten wie folgt:

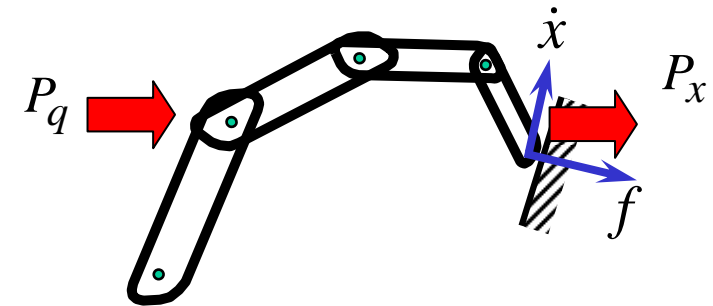
$$\dot{x} = \frac{df(q)}{dt} = \frac{\partial f(q)}{\partial q} \dot{q} = J(q)\dot{q}$$

Jacobimatrix

Da die Leistung P nicht verändert wird, gilt

$$P_q = P_x$$

$$P_x = f^T \dot{x} = f^T J(q)\dot{q} \Rightarrow \tau = J^T(q) f$$
$$P_q = \tau^T \dot{q}$$



Bemerkung: Das Produkt zwischen Vektor und

Kovektor ist somit wohl definiert, d.h. wird beim Wechsel von Koordinaten erhalten

Transformation von Vektoren und Kovektoren

Warum ist die Unterscheidung Vektor –Kovektor überhaupt wichtig?

Im Allgemeinen, falls ϕ eine Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M^m und N^n ist, mit

$$\begin{aligned} x & - \text{Koordinaten von } M^m \\ y & - \text{Koordinaten von } N^n \end{aligned} \quad y = \phi(x)$$

transformieren Vektoren **kontravariant**:

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x} \dot{x} = J_{\phi}(x) \dot{x}$$

und Kovektoren **kovariant**:

$$\eta_x = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^T \eta_y = J_{\phi}^T(x) \eta_y$$

Tensoren

Was sind die restlichen Größen in der Roboterdynamik? Wie transformieren sie?

Strecke:

$$\underline{M}(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}) + g(q) = \tau$$

Regler:

$$\tau = g(q_d) + \underline{K}(q_d - q) + \underline{D}(\dot{q}_d - \dot{q})$$

Ein Tensor vom Typ (p,q) ist eine *multilineare* Abbildung

$$A : \underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_p \times \underbrace{T_x^* M \dots \times T_x^* M}_q \rightarrow \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} p \text{ mal kovariant} \\ q \text{ mal kontravariant} \end{array}$$

Beispiele:

1. Ein Kovektor ist ein Tensor vom Typ $(1,0)$, also einmal kovariant

$$A = \eta, v \in T_x M \quad \eta(v) = \eta^T v = \sum_i \eta_i v_i \in \mathbb{R} \quad (=P \text{ für } \eta = \tau, v = \dot{q})$$

2. Ein Vektor ist ein Tensor vom Typ $(0,1)$, also einmal kontravariant

$$A = v, \eta \in T_x^* M \quad v(\eta) = v^T \eta = \sum_i v_i \eta_i \in \mathbb{R} \quad (=P \text{ für } \eta = \tau, v = \dot{q})$$

Tensoren

Was sind die restlichen Größen in der Roboterdynamik? Wie transformieren sie?

Beispiel:

3. M, K, D sind Tensoren vom Typ (2,0), also zweimal kovariant

$$A = a_{ij} \quad v_1, v_2 \in T_x M \quad A(v_1, v_2) = v_1^T A v_2 = \sum_{i,j} a_{ij} v_{1i} v_{2j} \in \mathbb{R}$$

- Für $A = \frac{1}{2} M(q), \quad v_1, v_2 = \dot{q}$ Massenmatrix

$$A(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = T(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}$$

← kinetische Energie

- Für $A = D, \quad v_1, v_2 = \dot{q}$ Dämpfungsmatrix

$$A(v_1, v_2) = \dot{q}^T D \dot{q} = E_D \in \mathbb{R}$$

vom viskosen Dämpfer
in Wärme umgesetzte
Energie

- Für $A = \frac{1}{2} K, \quad v_1, v_2 = \Delta q$ Steifigkeitsmatrix

$$A(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \Delta q^T K \Delta q = E_p \in \mathbb{R}$$

potentielle Energie
der (m-dimensionalen)
Feder

Bemerkung: Δq ist nur annähernd (für sehr „kleine Inkremente“) ein Vektor im Tangentialraum. Genauere Definition von E_p folgt zu einem späteren Zeitpunkt.

Tensoren

Bemerkung: durch Anwendung eines kovarianten Tensors auf einen Vektor ergibt sich ein kovarianter Tensor dessen Ordnung um 1 reduziert ist.

z.B.:

$$\begin{array}{c} \tau_D = D\dot{q} \\ \begin{array}{ccc} \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ (1,0) & (2,0) & (0,1) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E_D = \tau_D \dot{q} \\ \begin{array}{ccc} \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \end{array} \end{array}$$

Bemerkung: somit ist eine skalare Funktion ein Tensor nullter Ordnung

4. Tensoren vom Typ (1,1)

• lineares dynamisches System: $\dot{x} = Ax$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ (0,1) & (1,1) & (0,1) \end{array} \end{array}$$

Tafelerklärung:
wieso ist x ein Vektor?

Die Systemmatrix ist in diesem Fall ein Tensor vom Typ (1,1)
–einmal kovariant, einmal kontravariant

Tensoren

Was sind die restlichen Größen in der Roboterdynamik? Wie transformieren sie?

Beispiel:

5. M^{-1}, K^{-1} sind Tensoren vom Typ (0,2), also zweimal kontravariant

$$A = a_{ij} \quad \eta_1, \eta_2 \in T_x^* M \quad A(\eta_1, \eta_2) = \eta_1^T A \eta_2 = \sum_{i,j} a_{ij} \eta_{1i} \eta_{2j} \in \mathbb{R}$$

- Für $A = \frac{1}{2} M^{-1}(q)$, $\eta_1, \eta_2 = p$ ($p = M(q)\dot{q}$) Impuls

$$A(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2} p^T \overset{\text{Mobilitätsmatrix}}{M^{-1}}(q) p = T(q, p) \in \mathbb{R}$$

kinetische Energie

- Für $A = \frac{1}{2} K^{-1}$, $\eta_1, \eta_2 = \tau_e$ \leftarrow Steifigkeitsmatrix

$$A(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2} \tau^T K^{-1} \tau = E_p \in \mathbb{R}$$

potentielle Energie
der (m-dimensionalen)
Feder

Nachgiebigkeitsmatrix

Zusatzfolie: Tensoren

Beispiel:

6. Coriolis und Zentrifugalkräfte:

$$c_k(q, \dot{q}) = \sum_{i,j} c_{ijk} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Tensor vom Typ (1,0)
(d.h. Kovektor)

Tensor vom Typ (3,0)

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right) \quad m\text{-Elemente der Massenmatrix}$$

Koordinatentransformation für Tensoren

Wozu sind Unterscheidungen zwischen den Tensorarten gut?

Im Allgemeinen, gegeben eine Abbildung ϕ zwischen Mannigfaltigkeiten M^m und N^n , mit

$$\begin{aligned} x & - \text{Koordinaten von } M^m \\ y & - \text{Koordinaten von } N^n \end{aligned} \quad y = \phi(x)$$

Grundidee: die skalare Größe aus der Tensordefinition bleibt in allen Koordinaten erhalten. (z.B. Energie, Leistung des Roboters)

1. Tensoren vom Typ (2,0)

$$\begin{aligned} E_y &= v_y^T A_y v_y = v_x^T J_\phi^T(x) A_y J_\phi(x) v_x \\ E_x &= v_x^T A_x v_x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_x = J_\phi^T(x) A_y J_\phi(x)$$

Kongruenz-Transformation

2. Tensoren vom Typ (1,1)

$$\begin{aligned} E_y &= \eta_y^T A_y v_y = \eta_x^T J_\phi^{-1}(x) A_y J_\phi(x) v_x \\ E_x &= \eta_x^T A_x v_x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_x = J_\phi^{-1}(x) A_y J_\phi(x)$$

Ähnlichkeitstransformation

Skalarprodukt und Metrik von Vektoren

- in Euklidische Raum

$$\langle u, v \rangle = u^T v = \sum_i u_i v_i \quad \|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$$

- Verallgemeinerung auf Mannigfaltigkeiten

$$\langle u, v \rangle = u^T M v = \sum_{i,j} u_i M_{ij} v_j \quad \|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Dabei ist M ein (positiv definiten -p.d.) Tensor (auch Metrik genannt) vom Typ (2,0) und **muss bei einem Wechsel von Koordinaten entsprechend transformiert werden!**

Beispiel: Für Geschwindigkeitsvektoren \dot{q} ist z.B. $M = \frac{1}{2} M(q)$ (Massenmatrix) und $\|\dot{q}\|_M^2$ die kinetische Energie eines Manipulators.

(Damit wird auch das Problem der Maßeinheiten gelöst)

Bemerkung: Man erinnere sich, dass ein Vektor nicht auf einen anderen Vektor wirken kann, sondern nur auf einen kovarianten Tensor

Reziproke Twists und Wrenches

Orthogonalität zwischen Vektoren

$$u \perp v \Leftrightarrow \sum_i u_i v_i = 0$$

ist somit differentialgeometrisch nicht wohl definiert,

wohl aber die **reziproke Beziehung** eines Vektors v zu einem Kovektor w :

Ein Vektors v und ein Kovektor η werden als reziprok bezeichnet, wenn:

$$\eta^T v \quad (= \eta(v) = v(\eta) = \sum_i \eta_i v_i) = 0$$

Beispiel: Für $\eta = f$, $v = \dot{x}$: ein Wrench und ein Twist sind reziprok, wenn die umgesetzte Leistung 0 ist.

Hybride Kraft/Positionsregelung: Es werden m linear unabhängige Twists geregelt, sowie $(6-m)$ Wrenches, die reziprok zu den m Twists sind.